MAT604
Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Seçme Konular
Güz 2018
Ödev Soruları

1. $M = \{f \in C[a,b] : A < f(x) < B, \quad \forall x \in [a,b], \quad A, B \in \mathbb{R}\}$ şeklinde verilen M kümesinin $C[a,b]$ kümesinde açık olduğunu gösteriniz.

2. $M_0 = \{f \in C[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$ şeklinde tanımlanan M kümesi $C[0,1]$ ve $C^2[0,1]$ uzaylarının kapalı alt uzayı mıdır? Gösteriniz.

3. $$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,0] \text{ ise} \\ 1 - nx, & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \text{ ise} \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \text{ ise} \end{cases}$$

   şeklinde verilen fonksiyon dizisinin $C[a,b]$'de Cauchy dizisi olmadığını gösteriniz.

4. $K \in C([a,b] \times [a,b])$ olmak üzere,

   $$T(f(x)) = \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy$$

   şeklinde verilen $T : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ operatörünün sürekli ve lineer olduğunu gösteriniz.

5. $T(f)(t) = f(t^2)$ şeklinde tanımlanan $T : (C[0,1], \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ lineer dönüşümü sınırlı (sürekli) değildir. Gösteriniz.

6. $f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ olmak üzere,

   $$\begin{array}{rcccl} T & : & (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \\ & & f & \mapsto & T(f)(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\, dt \end{array}$$

   operatörü verilsin.

   (a) T operatörü lineer midir? Gösteriniz.
   (b) Sınırlı lineer operatörün tanımını yapınız. T operatörü sınırlı mıdır? Gösteriniz.
   (c) T operatörü sınırlı ise normunu hesaplayınız.
   (d) T bir büzülme dönüşümü müdür? İddianızı gerçekleyiniz.
   (e) T operatörünün sabit noktasının varlığı ve tekliği hakkında ne söyleyebilirsiniz?
   (f) Eğer var ise, T'nin sabit noktasını (noktalarını) bulunuz.

7. (f_n) dizisi $[0,1]$ aralığı üzerinde iki kez türevlenebilir olan ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(0) = f'(0) = 0$ eşitliklerini sağlayan bir dizi olsun. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0,1]$ için $|f_n''(x)| \le 1$ olsun. Bu durumda (f_n) dizisi düzgün yakınsak bir alt diziye sahiptir. İspatlayınız.

8. $(f_n) \subset C^1[0,1]$ fonksiyonlar dizisi bazı pozitif L_1 ve L_2 sayıları için

   $$|f_n(0)| \le L_1, \qquad \int_0^1 |f_n'(x)|^2\, dx \le L_2$$

   eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda (f_n) dizisi düzgün yakınsak bir alt diziye sahiptir. İspatlayınız.

9. $(f_n) \subset C^1[0,1]$ fonksiyonlar dizisi, her $x \in [0,1]$ için $|f_n'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ olsun ve $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$ şartını sağlasın. Bu dizinin düzgün yakınsayan bir altdizisinin olduğunu gösteriniz.

10. $C^1[a,b]$ uzayının $C[a,b]$ uzayına kompakt olarak gömüldüğünü gösteriniz.

11. Aşağıdaki ifadeler doğru ise ispatlayınız, değil ise karşıt örnek veriniz.

   (a) $(R)\int_a^b f$ mevcut ise $(R)\int_a^b |f|$ mevcuttur.
   (b) $(R)\int_a^b |f|$ mevcut ise $(R)\int_a^b f$ mevcuttur.
   (c) $(R)\int_{\mathbb{R}} f$ mevcut ise $\int_{\mathbb{R}} f$ mevcuttur.
   (d) $f, g \in L^1_{\text{loc}}$ ise $fg \in L^1_{\text{loc}}$ olur .
   (e) $C^\infty(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ içindeliği geçerlidir.

(f) $1 \leq p < q < \infty$ olmak üzere, **i)** $L^q[a,b] \subset L^p[a,b]$'dir. **ii)** $L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$'dir.

(g) $f^2 \in L^1$ ve $g^2 \in L^1$ ise $fg \in L^1$ olur.

(h) $f \in L^p$ ve $g \in L^p$ ise $fg \in L^{p/2}$ olur.

(i) $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $g^2 \in \mathcal{R}[a,b]$ ise $fg \in \mathcal{R}[a,b]$'dir.

(j) $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise $f^2 \in L^1(\mathbb{R})$'dir.

(k) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ ise $f \in \mathcal{R}[a,b]$'dir.

(l) $f \in C_0(\mathbb{R})$ ise $f \in L^p(\mathbb{R})$'dir.

(m) $x^a \in L^2(0,1)$ ancak ve ancak $a > -\frac{1}{2}$ ise.

(n) $x^a \in L^1(0,1)$ ancak ve ancak $a > -1$ ise.

12. $1 < p < q < \infty$ olsun. $f \in L^p(a,b) \cap L^q(a,b)$ ise her $q < r < p$ için $f \in L^r(a,b)$ olduğunu gösteriniz.

13. $n \to \infty$ iken

$$\|f_n - f\|_{L^p(a,b)} \to 0$$

ise, (f_n) fonksiyon dizisi f'ye h.h.h. $x \in (a,b)$ için yakınsayan bir alt diziye sahiptir. İspatlayınız.

14. Ω sınırlı bir bölge ve $f \in L^\infty(\Omega)$ ise

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

olduğunu gösteriniz. Ayrıca, her $p \in [1,\infty)$ için $L^p(0,1)$ sınıfından olan ancak $L^\infty(0,1)$ sınıfından olmayan bir fonksiyon örneği veriniz.

15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\mathcal{X}_{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]} \in L^1(\mathbb{R}) / L^2(\mathbb{R})$$

olduğunu gösteriniz. (İpucu: Beppo Levi Teoremi ve kıyaslama testi kullanınız.)

16. Yarıçapı r olan $4-$boyutlu bir yuvarın hacminin $\frac{\pi^2 r^4}{2}$, $5-$boyutlu bir yuvarın hacminin ise $\frac{8\pi^2 r^5}{15}$ olduğunu gösteriniz.

17. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ düzgün sınırlı bir bölge ve $f \in C_0^1(\Omega)$ olsun.

$$\int_\Omega f d\mu \leq \frac{(\mu(\Omega))^{1/n}}{C} \int_\Omega |\nabla f| \, d\mu$$

eşitsizliğinden faydalanarak

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \, d\mu \geq \frac{C^2}{4(\mu(\Omega))^{2/n}} \int_\Omega f^2 d\mu$$

olduğunu gösteriniz.

18. $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$, ρ yarıçaplı bir yuvar ve $r = |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ olmak üzere, $\Delta r^2 = 2n$ özdeşliğinden faydalanarak B'nin hacmi $\mu(B)$ ile yüzey alanı $\mu(\partial B)$ arasında bir ilişki kurunuz.

19. $u \in C^2(a,b)$ ve $u(a) = u(b) = 0$ ise

$$\left(\int_a^b [u''(x)]^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b [u(x)]^2 \, dx\right)^{1/2} \geq \int_a^b [u'(x)]^2 \, dx$$

olduğunu ispatlayınız.

20. $u \in C^1(a,b)$, $u(a) = u(b) = 0$ ve $\int_a^b u^2(x) \, dx = 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b x u(x) u'(x) \, dx = -\frac{1}{2}$$

ve

$$\frac{1}{4} \leq \left(\int_a^b [u'(x)]^2 \, dx\right) \left(\int_a^b x^2 u^2(x) \, dx\right)$$

olduğunu ispatlayınız.

21. Herhangi $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \geq \frac{2}{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini ispatlayınız.

22. Ω konveks bir küme ve $\delta = dist(x, \partial\Omega)$ x noktasının sınıra olan uzaklığını göstersin. O halde, $|\nabla\delta| = 1$ ve $-\Delta\delta \geq 0$ ise her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx$$

eşitsizliği sağlanır. Gösteriniz.

23.

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|}}, & |x| < 1 \text{ ise} \\ 0, & |x| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1 \text{ ise} \\ 0, & |x| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. ϕ ve φ fonksiyonları $C_0^\infty(\mathbb{R})$ sınıfından mıdır? Gösteriniz.

24. $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fakat $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$'dir. Gösteriniz.

25. $\dfrac{1}{1+x^2} \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{S}(\mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.

26.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. $f \notin C_0^\infty(\mathbb{R})$ iken $f(x) f(1-x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.

27. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ ilişkisini gösteriniz.

28. $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $\phi \in \mathcal{D}$ olsun. O halde

$$\begin{array}{cccl} F & : & \mathcal{D} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \phi & \mapsto \langle F, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) \, dx \end{array}$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonelinin bir distribüsyon olduğunu gösteriniz.

29. Dirac $\delta-$fonksiyonelinin singüler distribüsyon olduğunu gösteriniz.

30. (f_n) bir pozitif fonksiyon dizisi olsun, öyle ki

$$\text{supp}(f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{0\} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \, dx = 1$$

koşullarını sağlasın. $n \to \infty$ iken (f_n) dizisinin distribüsyonel manada Dirac δ distribüsyonuna yakınsayacağını gösteriniz.

31.

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

şeklinde tanımlanmış $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_n$ dizisini düşünelim. Bu dizinin, yani bu dizinin ürettiği

$$\begin{array}{cccl} T_n & : & \mathcal{D} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \phi & \mapsto \langle T_n, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) \phi(x) \, dx \end{array}$$

distribüsyon dizisinin Dirac $\delta-$distribüsyonuna yakınsadığını gösteriniz.

32.

$$f_n(x) = n e^{-\pi n^2 x^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

şeklindeki Gauss dağılım fonksiyon dizisinin distribüsyonel manada Dirac distribüsyonuna yakınsayacağını gösteriniz.

33.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 + x, & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun genelleşmiş türevini bulunuz.

34. $\Omega = \mathbb{R}$ bölgesinde $\operatorname{sgn} x$ fonksiyonunun genelleşmiş türevini bulunuz.

35.

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

fonksiyonunun $-\Delta$ Laplace operatörünün temel çözümü olduğunu, yani $-\Delta u = \delta$ olduğunu gösteriniz.

36.

$$U_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n (n-2)} |x|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun $-\Delta$ Laplace operatörünün temel çözümü olduğunu, yani $-\Delta U_n = \delta$ olduğunu gösteriniz. Burada ω_n, $\mathbb{R}^n$'deki birim kürenin yüzey alanını temsil etmektedir.

37. $u(x) = -\frac{1}{8\pi} |x|^2 \ln |x|$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$'de $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ biharmonik operatörün temel çözümüdür. İspatlayınız. Yani, herhangi $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ test fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \Delta^2 u(x)\, dx = -\phi(0)$$

olduğunu gösteriniz.

38. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ve $p \geq 1$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında yoğun olduğunu gösteriniz.

39. $\Omega = \mathbb{R}$ bölgesinde $|x|$ fonksiyonunun zayıf türevini bulunuz.

40. $\Omega = \mathbb{R}$ bölgesinde $\operatorname{sgn} x$ fonksiyonunun zayıf türevi yoktur. Gösteriniz.

41. $\Omega = (0, 2)$ ve

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ 2, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. u fonksiyonunun Ω bölgesinde zayıf türevi yoktur. Gösteriniz.

42. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 1 - n$ olsun. $u(x) = |x|^\alpha$ fonksiyonunun $B_1(0)$ üzerinde 1. mertebeden zayıf türevini bulunuz.

43. $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ve $\alpha > 1 - n$ olsun.

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & \epsilon < |x| < 1, \\ \epsilon^\alpha, & |x| \leq \epsilon \end{cases}$$

fonksiyonunun Ω üzerinde 1. mertebeden zayıf türevini bulunuz.

44. Hangi α değerleri için $u(x) = |x|^\alpha$ fonksiyonu $H^1(0, 1)$ sınıfındandır?

45. $\Omega = (0, 1) \times (0, 2)$ ve $u(x, y) = \sqrt{x}$ olsun. u fonksiyonu $H^1(\Omega)$ uzayının elemanı mıdır? Gösteriniz.

46. $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ ve $u(x, y) = \cos x + \sin y$ olsun. u fonksiyonu $H^1(\Omega)$ uzayının elemanı mıdır? Gösteriniz.

47. $u(x) = x^3$ fonksiyonu $H^2(0, 1)$ uzayının elemanı mıdır? Gösteriniz.

48. $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ve $u(x, y) = x^2 + y^2$ olsun. $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ ve $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ normlarını hesaplayınız.

49. $u(x) = |\sin(100x)|$ fonksiyonu $H_0^1[0, 1]$ uzayının elemanı mıdır? Gösteriniz.

50. Hangi α ve β değerleri için $u(x) = |x|^\alpha \cos(\beta x)$ fonksiyonu $H^1(-1, 1)$ sınıfındandır?

51. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, hangi $\alpha > 0, n, p$ değerleri için $u(x) = |x|^{-\alpha}$ fonksiyonu $W^{1,p}(B_1(0))$ sınıfındandır?

52. $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0)$ ve $\Omega = B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)$ için hangi α değerleri için $u(x, y) = \left|\ln\left(x^2 + y^2\right)\right|^\alpha$ fonksiyonu $H^1(\Omega)$ sınıfındandır?

53. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere, hangi α değerleri için $u(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ fonksiyonu $W^{1,2}(B_1(0))$ sınıfındandır?

54. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere, hangi $p \geq 1$ değerleri için $u(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ fonksiyonu $W^{1,p}(B_1(0))$ sınıfındandır?

55. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $n > 1$ için $\log\log\left(1+\frac{1}{|x|}\right) \in W^{1,n}(B_1(0))$ olduğunu gösteriniz.

56. $u, v \in H_0^1(0,1)$ ise $uv \in H_0^1(0,1)$'dir. Gösteriniz.

57. $H_0^1(0,1)$ uzayının $C(0,1)$ uzayına sürekli gömüldüğünü gösteriniz.

58. (L^p-**Poincare-Friedrich Eşitsizliği**) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, $|\Omega|$ ise bu bölgenin hacmi olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{1/n} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlayınız.

59. Riesz Temsil Teoremini ifade ediniz. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $h \in L^2(\Omega)$ olsun. Riesz Temsil Teoreminden faydalanarak

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

probleminin $H_0^1(\Omega)$ sınıfından olan tek bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.