SONSUZ DİZİLER ve SERİLER

Sonsuz Diziler

Sezgisel olarak bir dizi, bazı sayıların belirli bir sıraya göre dizilmesi olarak düşünülebilir:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Biz sonsuz dizilerle ilgileneceğiz. Dolayısıyla, her a_n teriminden sonra gelen bir a_{n+1} terimi olacaktır.

Tanım. Tanım kümesi pozitif tamsayılar olan bir fonksiyona dizi denir.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = a_n \end{aligned}$$

Gösterim. (a_n) veya $\{a_n\}$ veya $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n & \end{array}$$

← tanım kümesindeki sayılar

← değer kümesindeki sayılar

1. terim 2. terim genel terim

$$\begin{aligned} a_n : \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

← reel sayı dizisi (yani terimleri reel sayılardan oluşuyor)

ÖRN.

a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ ← rasyonel sayı dizisi

b) $\left(\sqrt{n-3}\right)_{n=3}^{\infty}$, $a_n = \sqrt{n-3}$, $n \geq 3$, $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$ ← reel sayı dizisi

c) (π), $a_n = \pi$, $\{\pi, \pi, \ldots, \pi, \ldots\}$ ← sabit dizi

* Dizinin terimlerinin sırası değişirse dizi değişir.

ÖRN. İlk birkaç terimi verilen ve bundan sonraki terimleri de bu kurala uyan dizilerin genel terimi a_n için bir formül bulunuz.

a) $\left\{ \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots \right\} \longrightarrow a_n = \frac{1}{n+6} \quad n \geq 1$

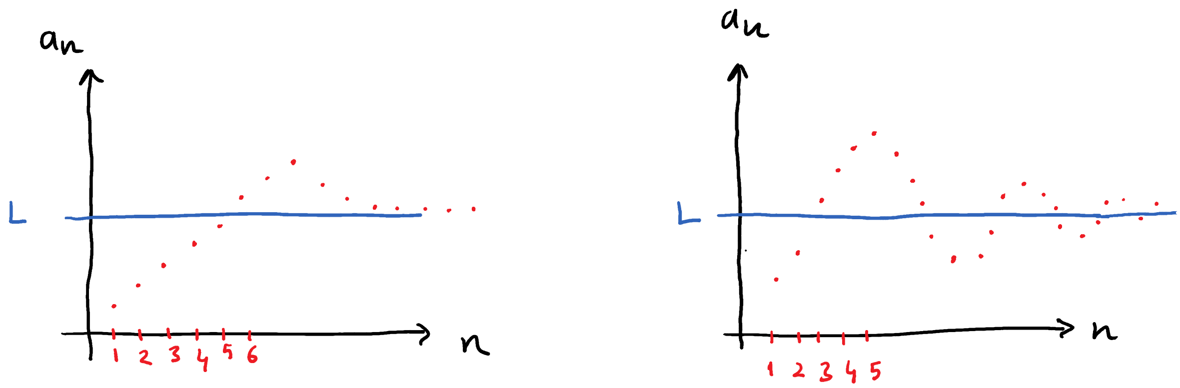
b) $\left\{ -\frac{3}{8}, \frac{4}{10}, -\frac{5}{12}, \frac{6}{14}, \frac{-7}{16}, \dots \right\} \longrightarrow a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n+6}, \quad n \geq 1$

c) $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\} \longrightarrow a_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}, \quad n \geq 1$

Sezgisel Tanım (Yakınsaklık) n sayısı yeteri kadar büyük seçilerek, a_n terimleri L'ye istenildiği kadar yakın yapılabiliyorsa (a_n) dizisinin limiti L'dir denir ve

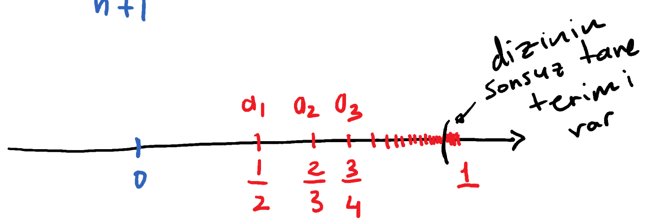
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ya da} \quad n \to \infty \text{ iken } a_n \to L$$

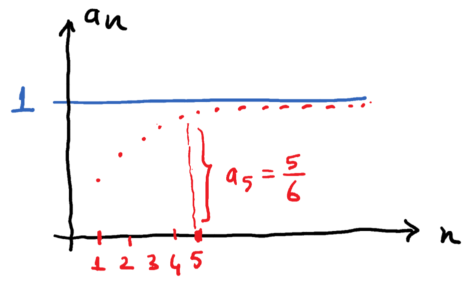
yazılır. Eğer bu limit varsa, (a_n) dizisi yakınsaktır denir. Aksi durumda, dizi ıraksaktır denir.



$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ olan iki dizinin grafiği

$a_n = \frac{n}{n+1}$ genel terimli (a_n) dizisini düşünelim:





n büyüdükçe (a_n) dizisinin terimleri 1'e yaklaşıyor.

Teorem 1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ ve her n doğal sayısı için $f(n) = a_n$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ olur.

Gösterim. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ yerine $\lim a_n$ yazacağız.

Limit Kuralları (a_n) ve (b_n) iki yakınsak dizi ve c bir sabit ise

1) $\lim (a_n \mp b_n) = \lim a_n \mp \lim b_n$

2) $\lim c\, a_n = c \lim a_n$ $\qquad \lim c = c$ //

3) $\lim (a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$

4) $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, $\quad \lim b_n \neq 0$ ise

5) $\lim [a_n]^p = [\lim a_n]^p$, $\quad p>0$ ve $a_n > 0$ ise

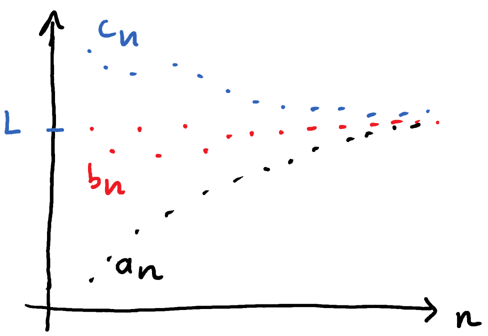
olur.

Teorem 2. $r>0$ için $\lim \frac{1}{n^r} = 0$ 'dır.

ÖRN. a) $\lim \frac{n-1}{n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim 1 = 1$ //

b) $\lim \frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim \frac{\cancel{n^6}\left(4/n^6 - 7\right)}{\cancel{n^6}\left(1 + 3/n^6\right)} = \lim \frac{\frac{4}{n^6} - 7}{1 + \frac{3}{n^6}} = -7$

Sıkıştırma Teoremi. $n \geq n_0$ için $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim a_n = \lim c_n = L$ ise $\lim b_n = L$ olur.



(b_n) dizisi, (a_n) ve (c_n) dizileri ile sıkıştırılmıştır.

Teorem 3. $\lim |a_n| = 0$ ise $\lim a_n = 0$ 'dır.

İspat.

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$$

$n \to \infty$ iken $-|a_n| \to 0$, $|a_n| \to 0$ ve $a_n \to 0$ (S.T.)

ÖRN. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ genel terimli dizi yakınsak mıdır?

ÇÖZ. $\lim |a_n| = \lim \left| \dfrac{(-1)^n}{n} \right| = \lim \dfrac{|(-1)^n|}{n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$

O halde, $\lim a_n = 0$ olur.

ÖRN. Aşağıdaki genel terimleri verilen dizilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$ b) $a_n = (-1)^n$ c) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

d) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1} \right)^n$, $n \geq 2$ e) $a_n = 5^{-n} \cos n$

f) $a_n = \dfrac{n \sin(n!)}{3n^2 - n}$

ÇÖZ. a) $-1 \le \cos n \le 1$ $\forall n \geq 1$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

$n \to \infty$ iken $-\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$ ve $\frac{\cos n}{n} \to 0$ (S.T'den)

b) $a_n = (-1)^n$; $\{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$

Yani, a_n -1 ile 1 değerlerini alarak gidip gelir ve hiçbir sayıya yaklaşmaz. O halde,

$\lim (-1)^n$ yoktur $\Rightarrow (a_n)$ ıraksaktır.

c) $(a_n) = \dfrac{\ln n}{n}$;

L'Hospital kuralı dizilere doğrudan uygulayamayız çünkü bu kural gerçel değerli fonk. uygulanabilmektedir.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ olsun.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{LH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$f(n) = a_n$ olduğundan Teorem 1'den $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$ dur.

Bundan sonra işlem kalabalığı olmaması adına, L'Hospital kuralını uygularken n'ye sürekli bir reel değişken gibi davranıp direk işlem yapacağız.

d) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$; $n \to \infty$ iken $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ 1^∞-belirsizliği

$$\ln a_n = n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \Rightarrow a_n = e^{n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}$$

$$\lim a_n = e^{\lim n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)} = ?$$

?

$$\lim n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{LH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim \frac{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)' \Big/ \left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)'}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{\overbrace{(n-1) - (n+1)}^{=-2}}{(n-1)^2} \Big/ \dfrac{(n+1)}{(n-1)}}{-\dfrac{1}{n^2}} = \lim \frac{\dfrac{-2}{(n-1)^2} \cdot \dfrac{n-1}{n+1}}{-\dfrac{1}{n^2}}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{-2}{(n-1)(n+1)}}{-1/n^2} = \lim \frac{2n^2}{(n-1)(n+1)} = 2$$

Sonuç olarak, $\lim a_n = e^{\lim n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)} = e^2$ dir.

Yani, (a_n) dizisi e^2'ye yakınsar.

e) $a_n = \dfrac{\cos n}{5^n}$; $\quad -1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$

$$-\frac{1}{5^n} \leq \frac{\cos n}{5^n} \leq \frac{1}{5^n} \quad \forall n \geq 1$$

$n \to \infty$ iken $-\frac{1}{5^n} \to 0$, $\frac{1}{5^n} \to 0$, $\frac{\cos n}{5^n} \to 0$ (ST'den)

$\therefore$ (a_n) dizisi 0'a yakınsar.

f) $a_n = \dfrac{n \sin(n!)}{3n^2 - n}$; $\quad -1 \leq \sin(n!) \leq 1 \quad \forall n \geq 1$

$$\left(\frac{n}{3n^2-n} = \frac{1}{3n-1} \underset{n \geq 1}{>} 0 \right)$$

$$-\frac{n}{3n^2-n} \leq \frac{n \sin(n!)}{3n^2-n} \leq \frac{n}{3n^2-n} \quad \forall n \geq 1$$

$n \to \infty$ iken $-\frac{n}{3n^2-n} \to 0$, $\frac{n}{3n^2-n} \to 0$, $\frac{n \sin(n!)}{3n^2-n} \to 0$ (ST'den)

ÖRN. Hangi r değerleri için (r^n) dizisi yakınsaktır?

ÇÖZ. i) $r > 1$ için $\lim r^n = \infty$ olur.

ii) $r = 1$ için $\lim (1)^n = \lim 1 = 1$ 'dir.

iii) $-1 < r < 1$ için $\lim r^n = 0$ olur.

iv) $r = -1$ için $\lim (-1)^n$ mevcut değildir.

v) $r < -1$ için $\lim r^n$ mevcut olmaz.

Dolayısıyla,

$$\lim r^n = \begin{cases} 0, & -1 < r < 1 \text{ ise} \\ 1, & r = 1 \text{ ise} \\ \text{ıraksak}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

ÖRN. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ genel terimli (a_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çöz. $a_1 = \dfrac{1!}{1^1} = 1$, $a_2 = \dfrac{1.\overbrace{2}^{=1}}{2.2}$, $a_3 = \dfrac{1.\overbrace{2.3}^{<1}}{3.3.3}$, $a_4 = \dfrac{1.\overbrace{2.3.4}^{<1}}{4.4.4.4}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3.\cdots.n}{n\,n\,n \cdots n} = \frac{1}{n}\Bigg(\underbrace{\frac{2.3\cdots n}{n.n \cdots n}}_{\leq 1}\Bigg)$$
$$\leq \frac{1}{n}$$

Yani, $0 < a_n \leq \dfrac{1}{n}$ oldu.

$n\to\infty$ iken $0 \to 0$, $\dfrac{1}{n} \to 0$, $a_n \to 0$ (ST'den)

Not. $n\to\infty$ iken $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olur ancak L'Hospital uygulanamaz. Çünkü x tamsayı değilken $x!$ tanımlı olmadığından verilen diziye karşılık gelen uygun bir fonk. yoktur.

ÖRN. $a_1 = 6.7$, $a_2 = 6.77$, $a_3 = 6.777$, ... dizisinin genel terimini bulunuz ve bu dizinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çöz. $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$a_1 \to 6.7$, $a_2 \to 6.77$, $a_n \to 6.\underbrace{77\cdots7}_{n \text{ tane}}$

$$a_n = 6.77\cdots7 = 6 + \frac{\overbrace{77\cdots7}^{n\text{ tane}}}{10^n} = 6 + \frac{7}{9}\,\frac{9(\overbrace{111\cdots1}^{n\text{ tane}})}{10^n}$$
$$= 6 + \frac{7}{9}\left(\frac{\overbrace{999\cdots9+1}^{10^n}-1}{10^n}\right)$$
$$= 6 + \frac{7}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$\lim a_n = \lim\left[6 + \frac{7}{9}\Big(1 - \overset{0}{\cancel{\tfrac{1}{10^n}}}\Big)\right] = 6 + \frac{7}{9}$$

ÖRN. $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ genel terimli (a_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

ÇÖZ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ 'in limit formu $\frac{\infty}{\infty}$ olur. $f(x) = x!$ olarak bir fonksiyon tanımlanmadığından, (çünkü $x!$ tamsayılar için tanımlı) L'Hospital kuralını kullanamayacağız.

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n \text{ tane}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \overbrace{\underbrace{\frac{2}{3}}_{\leq \frac{2}{3}} \ \underbrace{\frac{2}{4}}_{<\frac{2}{3}} \ \underbrace{\frac{2}{5}}_{<\frac{2}{3}} \cdots \underbrace{\frac{2}{n}}_{<\frac{2}{3}}}^{n-2 \text{ terim}}$$

$$\leq 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$= 2 \ \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

O halde,

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

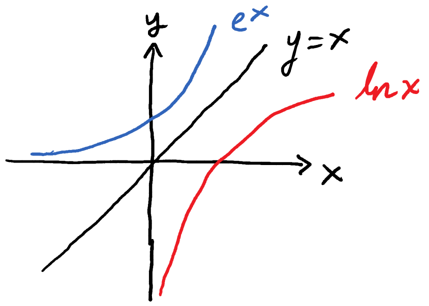
oldu. $\lim 0 = 0 = \lim \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ olduğundan

Sıkıştırma Teoremi gereğince

$$\lim \frac{2^n}{n!} = 0$$

olur.

Pratik bilgi:



Grafikten görüldüğü üzere üstel fonk. polinomlara göre, polinomlar ise logaritmik fonksiyonlara göre daha hızlı büyür.
O halde, kabaca şu ilişkiyi yazabiliriz:

(büyük n'ler için) $n! > e^n >$ polinom $> \ln n$

Bu durumda, hızlı büyüyen fonk. bir rasyonel ifadenin paydasında ise bu rasyonel ifadenin limiti sıfır olur.

Sık Karşılaşılan Limitler

1) $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$ 2) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim x^{1/n} = 1 \quad (x>0)$ 4) $\lim x^n = 0 \quad (|x|<1)$

5) $\lim \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x\in\mathbb{R})$ 6) $\lim \dfrac{x^n}{n!} = 0 \quad (x\in\mathbb{R})$

ÖRN.

a) $\dfrac{\ln(n^2)}{n} = 2\,\dfrac{\ln n}{n} \longrightarrow 2\cdot 0 = 0$ $n\to\infty$ iken

b) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \longrightarrow 1^2 = 1$ $n\to\infty$ iken

c) $\sqrt[n]{3n} = (3n)^{1/n} = 3^{1/n}\cdot n^{1/n} \longrightarrow 1\cdot 1 = 1$ $n\to\infty$ iken

d) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$, $x = -\dfrac{1}{2} < 1$

e) $\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{-2}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-2}$

f) $\dfrac{100^n}{n!} \longrightarrow 0$ çünkü $n!$ daha hızlı büyür.

g) $\dfrac{\ln n}{e^n} \longrightarrow 0$ çünkü e^n daha hızlı büyür.

Tanım (Artan ve Azalan Dizi) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için

i) $a_n < a_{n+1}$ ise (yani $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$) diziye monoton artan

ii) $a_n > a_{n+1}$ ise (yani $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$) diziye monotan azalan

denir.

• $a_{n+1} - a_n$ $\to > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n$ artan

$\quad\quad\quad\quad\;\to < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_n$ azalan

•• $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $\to > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n$ artan

$\quad\quad\quad\to < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_n$ azalan

••• $f(n) = a_n$ olsun. $\underbrace{f'(x) > 0 \text{ ise } f \text{ artan}}_{a_n \text{ artan}}$, $\underbrace{f'(x) < 0 \text{ ise } f \text{ azalan}}_{a_n \text{ azalan}}$.

ÖRN. Aşağıdaki dizilerin monotonluğunu inceleyiniz.

a) $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$ b) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ c) $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-7}$ d) $a_n = \dfrac{3^n}{(n+1)!}$

GÖZ. a) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2n+3}{3n+5} - \dfrac{2n+1}{3n+2} = \dfrac{1}{(3n+5)(3n+2)} > 0 \quad n \geq 1$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow (a_n)$ dizisi artandır.

b) $f(n) = a_n$ olmak üzere, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ olsun. $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ olur.

$x > 1$ için $f'(x) < 0$ 'dır. Yani, f fonk. $(1, \infty)$ aralığında azalandır.
Başka deyişle, $a_n = f(n)$ genel terimli dizi azalandır.

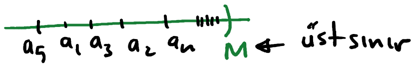
c) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2n+3}{3n-4} - \dfrac{2n+1}{3n-7} = \dfrac{-17}{(3n-7)(3n-4)}$ ifadesi n'ye göre pozitif veya negatif olabilir. O halde (a_n) dizisi monoton değildir.

d) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}/(n+2)!}{2^n/(n+1)!} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \dfrac{(n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{2}{n+2} < 1 \quad \forall n \geq 1$

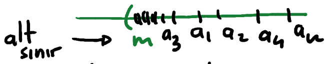
$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow (a_n)$ dizisi azalandır.

Tanım (Sınırlı Dizi). Her $n \in \mathbb{N}^+$ için

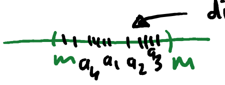
i) $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (a_n) dizisine üstten sınırlı,



ii) $a_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (a_n) dizisine alttan sınırlı



denir. Bir dizi hem alttan hem de üstten sınırlıysa diziye sınırlı dizi denir.



dizinin terimleri hep m ile M arasında

ÖRN. a) $a_n = n \quad \longrightarrow \quad \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ alttan sınırlıdır. Ancak üstten sınırlı değildir.

b) $a_n = \dfrac{n}{n+1} \quad \longrightarrow \quad n \geq 1$ için $\dfrac{n}{n+1} < 1$ 'dir. Üstten sınırlıdır.

Diğer yandan, $a_1 = \frac{1}{2}$ tarafından alttan sınırlıdır.

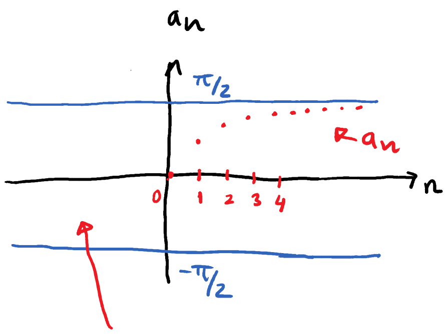
$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

Yani, $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$ olur. Dizi sınırlıdır.

c) $a_n = \sin(n!+3) \quad \rightarrow \quad -1 \leq \sin(n!+3) \leq 1$ olduğundan, (a_n) dizisi sınırlıdır. $(|a_n| \leq 1)$

d) $a_n = \arctan(n) \quad \rightarrow$

$n \geq 0$



Grafikten görüldüğü üzere $0 \leq a_n < \frac{\pi}{2}$ dir. Yani, (a_n) dizisi sınırlıdır.

$\{\arctan 0, \arctan 1, \arctan 2, \ldots\}$
$\quad \arctan 0 = 0, \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan 2 = \frac{\pi}{3}$

grafiğin buradaki parçası yok çünkü $n \geq 0$.

e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \rightarrow \quad$ Her $n \geq 1$ için $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \dfrac{1}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ dir.

Dolayısıyla $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{(-1)^n}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ olur.

Yani, (a_n) dizisi sınırlıdır.

Monoton Yakınsaklık Teoremi: Sınırlı ve monoton her dizi yakınsaktır.