

İntegral Alma Teknikleri, Belirli İntegral, Alan, Hacim, Yay Uzunluğu, Yüzel Alanı, Has Olmayan İntegral

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- | | | | |
|---|---------------------------------------|--------------------------------------|--|
| (a) $\int \frac{\sin(3 \ln x)}{x} dx$ | (b) $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$ | (c) $\int x^3 \cos(x^2) dx$ | (d) $\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$ |
| (e) $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$ | (f) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ | (g) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ | (h) $\int \tan^3 x \sec^7 x dx$ |
| (i) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$ | (j) $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}} dx$ | (k) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ | (l) $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ |
| (m) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$ | (n) $\int x^2 e^x dx$ | (o) $\int x^2 \ln x dx$ | (p) $\int x \arctan x dx$ |
| (q) $\int \frac{x^4+2x^2+x}{x^3+1} dx$ | (r) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3} dx$ | (s) $\int \frac{x+3}{x^4+9x^2} dx$ | (t) $\int \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}} dx$ |
| (u) $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$ | (v) $\int e^x \cos x dx$ | (w) $\int \tan^2 x dx$ | (x) $\int \tan^5 x dx$ |
| (y) $\int \cot^3 x \csc^3 x dx$ | (z) $\int \cot^6 x \csc^4 x dx$ | | |

2. Verilen fonksiyonun basit kesirler cinsinden ifadesini yazınız.

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $\frac{2x+1}{(x+1)^3(x^2+4)^2}$ | (b) $\frac{x^4}{(x^3+x)^3(x^2-x+3)}$ |
|-------------------------------------|--------------------------------------|

3. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|---|
| (a) $\int_{-1}^1 x+1 dx$ | (b) $\int_{-1}^1 [x+2] dx$ | (c) $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & -1 < x \leq 0 \\ 3x^2, & 0 < x < 2 \end{cases}$ ise $\int_{-1}^2 f(x) dx$ |
|----------------------------|----------------------------|---|

4. Aşağıdaki integralleri geometrik bir yaklaşım ile hesaplayınız.

- | | |
|--|---|
| (a) $\int_0^3 [\sqrt{9-x^2} - (3-x)] dx$ | (b) $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (\sqrt{1-x^2} - x) dx$ |
|--|---|

5. f fonksiyonu $x=1$ noktasında x -eksenine teğet ve $x=3$ noktasındaki teğetinin eğimi 2 ise

$$\int_1^3 f'(x) f''(x) dx$$

integralinin değeri nedir?

6. $F(x) = \int_x^{x^2+1} (2t+3) dt$ ise $F'(x)$ nedir?

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt}{x}$ limitlerini hesaplayınız.

8. Verilen eğrilerle sınırlı olan bölgenin alanını bulunuz.

- | | |
|---|---|
| (a) $y = x+1, y = 9-x^2, x = -1, x = 2$ | (b) $y = x, y = x^2$ |
| (c) $x = 1-y^2, x = y^2-1$ | (d) $y = x^3$ ve bu eğrinin grafiğine $x=1$ de teğet olan doğru |

9. $x = 9-y^2$ ve $x = 5$ eğrilerle sınırlı olan bölgenin alanını iki farklı şekilde hesaplayınız:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (a) y -eksenli integral | (b) x -eksenli integral |
|---------------------------|---------------------------|

10. Verilen eğrilerle sınırlı olan bölgenin, verilen doğru çevresinde döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

- | |
|--|
| (a) $y = 1/x, x = 1, x = 2, y = 0$; x eksenli etrafında |
| (b) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$; x eksenli etrafında |
| (c) $y = x^2, x = y^2$; x eksenli etrafında |
| (d) $y = x, y = \sqrt{x}; y = 1$ doğrusu etrafında |
| (e) $y = x^2, 0 \leq x \leq 2, y = 4, x = 0$; y eksenli etrafında |

11. $y = x$ ve $y = x^2$ eğrileriyle sınırlanan bölgenin (a) x -ekseni, (b) y -ekseni, (c) $y = 2$ eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen cisimlerin hacimlerini veren integrali disk ve kabuk yöntemleri ile ayrı ayrı ifade ediniz.

12. Verilen aralıkta eğrilerin uzunluğunu bulunuz.

(a) $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$

(b) $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$

(c) $y = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$, $\ln 2 \leq x \leq \ln 3$

(d) $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3)$, $1 \leq y \leq 4$

(e) $y = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, $0 \leq x \leq \pi/6$

13. Aralarındaki uzaklık 200 m olan iki kule arasında bir elektrik kablosu çekilmek isteniyor. Bu kablonun kulenin ayaklarını birleştiren hatta en yakın noktası 150 m olarak ölçülüyor. Bu durumda kablonun teşkil ettiği eğrinin denklemi

$$y = 75 \left(e^{x/150} + e^{-x/150} \right)$$

olarak veriliyor. İki kule arasındaki kablonun uzunluğunu bulunuz.

14. R , $y = x^2 + 2$ parabolü ile $y = 1$, $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölge olsun.

(a) R bölgesinin alanının hesaplayınız.

(b) R bölgesinin çevresini veren integrali yazınız.

(c) R bölgesinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini ifade eden integrali yazınız.

(d) R bölgesinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini ifade eden integrali yazınız.

15. Verilen aralık üzerinde her bir grafiğin belirtilen eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanını bulunuz.

(a) $y = 2\sqrt{x}$, $[0, 8]$; x -ekseni

(b) $y = x^2 + 1$, $[0, 3]$; y -ekseni

(c) $y = \sqrt{16 - x^2}$, $[0, \sqrt{7}]$; y -ekseni

(d) $y = 2x + 1$, $[2, 7]$; x -ekseni

16. $[1, 8]$ aralığında $y = x^{2/3}$ ün $y = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını veren belirli integrali yazınız.

17. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık ve iraksaklık durumunu inceleyip yakınsak olanların hangi değere yakınsadığını bulunuz.

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ (b) $\int_0^\infty (1 + 2x) e^{-x} dx$ (c) $\int_{-5}^1 \frac{1}{10 + 2x} dx$

(d) $\int_1^4 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$ (e) $\int_4^\infty \frac{1}{x (\ln x)^3} dx$ (f) $\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$

(g) $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx$

18. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx \neq 0$ dır. Neden?

19. $\int_0^\infty \frac{10}{x^2 - 2x} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu belirleyebilmek için kaç tane has olmayan integral incelenmelidir?