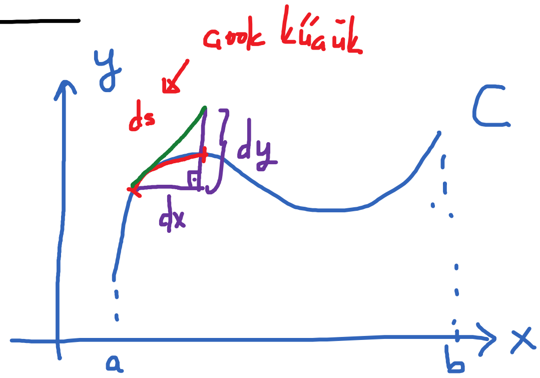
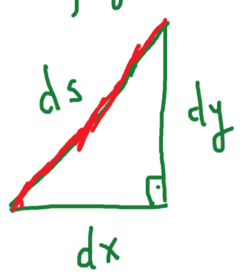
YÜZEY ALANI

Hatırlatma
(Yay uzunluğu)



C : $y = f(x)$

ds çok küçük olduğunda dik üçgendeki teğet doğrusundan farksız olur, yani



(yukarıdaki grafikte ds sonsuz küçük olduğunda)

O halde, Pisagor Teoreminden

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$$

yay uzunluğu diferansiyeli

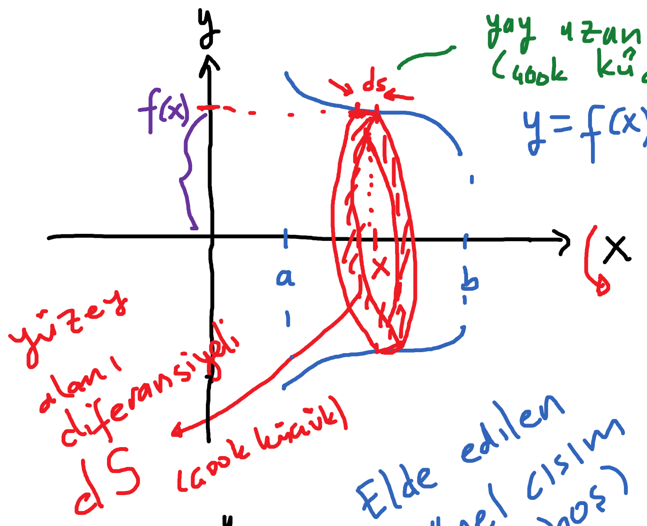
$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

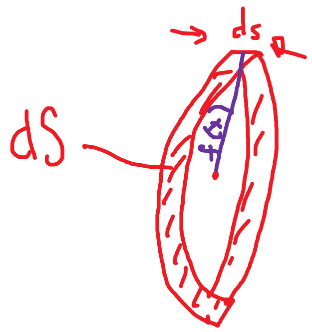
$$\ell(C) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

yay uzunluklarını a'dan b'ye kadar topluyoruz

= C eğrisinin a'dan b'ye olan yay uzunluğu

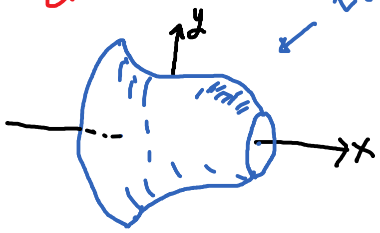
Amaç. Dönel cisimlerin yüzey alanını hesaplamak

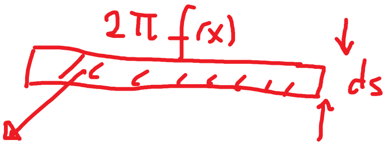




ds: f(x) yarıçaplı ds kalınlığında bir yüzük

Elde edilen dönel cisim (içi boş)





$$dS = 2\pi f(x)\, ds$$

yüzey alanı diferansiyeli $= 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$

$$\text{Yüzey Alanı } (S) = \int_a^b dS = \boxed{2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}$$

Benzer şekilde, y-ekseni etrafında bir $x=g(y)$ eğrisi döndürüldüğünde $c \le y \le d$ için elde edilen cismin yüzey alanı

$$S = \int_c^d dS = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy$$

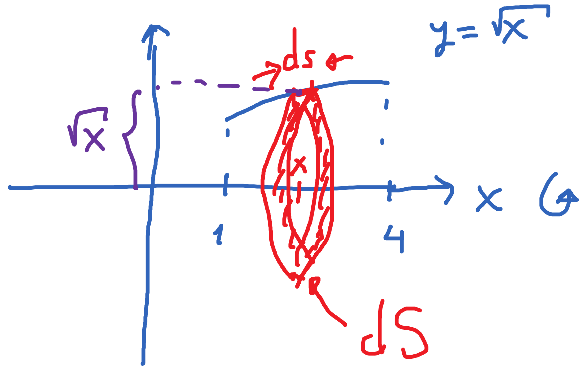
olur. Veya, $y=f(x)$ ve $x \in [a,b]$ için

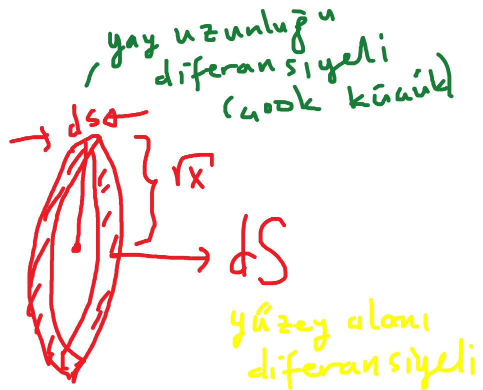
$$S = \int_a^b dS = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

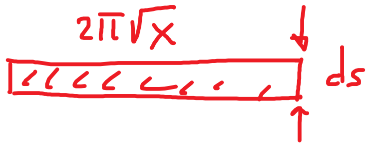
şeklinde de bulunur

ÖRN 1. $[1,4]$ aralığı üzerinde $y=\sqrt{x}$ in grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.

Çöz.







$$dS = 2\pi\sqrt{x}\, ds$$

ds yi bulalım;

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4x}+1}$$

O halde,

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

olur. Buradan,

$$dS = 2\pi\sqrt{x}\,ds = \cancel{2}\pi\cancel{\sqrt{x}}\underbrace{\frac{\sqrt{4x+1}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{x}}}\,dx}_{ds} = \pi\sqrt{4x+1}\,dx$$

bulunur. Sonuç olarak

$$S = \int_1^4 dS = \pi\int_1^4 \sqrt{4x+1}\,dx = \pi\int_5^{17} u^{1/2}\,\frac{du}{4}$$

$u=4x+1$
$du=4dx$
$x=1 \Rightarrow u=5$
$x=4 \Rightarrow u=17$

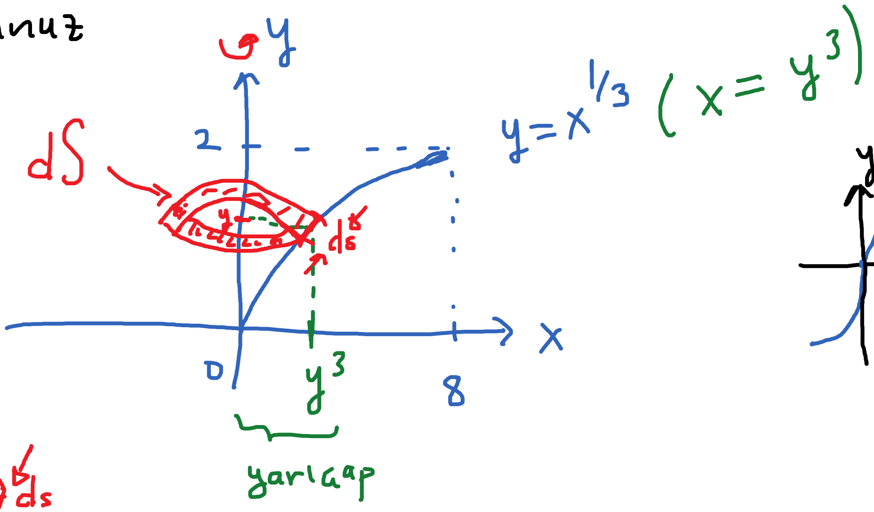
$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_5^{17}$$

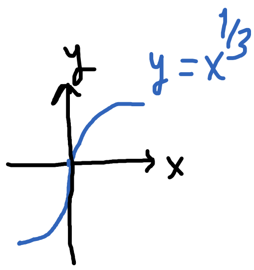
$$= \frac{\pi}{6}\left[17^{3/2} - 5^{3/2}\right]$$

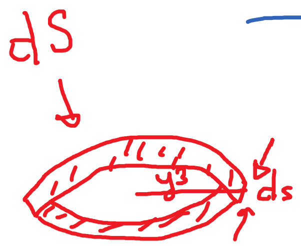
← S yüzeyi

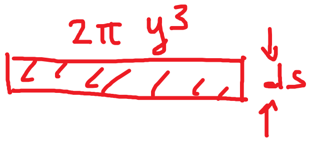
ÖRN 2. $[0,8]$ aralığı üzerinde $y=x^{1/3}$ ün grafiğinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan S yüzey alanını bulunuz

ÇÖZ









$$dS = 2\pi y^3\, ds$$

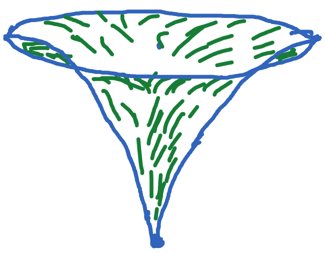
ds yı bulalım: $x = y^3 \quad \therefore \quad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 \qquad ds = \sqrt{1+9y^4}\, dy$$

$$S = \int_0^2 dS = 2\pi \int_0^2 y^3\, ds = 2\pi \int_0^2 \sqrt{1+9y^4}\; y^3\, dy$$

$$\left(\begin{array}{l} u = 1+9y^4 \\ du = 36\, y^3 dy \\ y=0 \Rightarrow u=1 \\ y=2 \Rightarrow u=145 \end{array}\right) \qquad = 2\pi \int_1^{145} u^{1/2}\, \frac{du}{36}$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(145^{3/2} - 1\right)$$

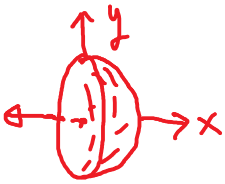


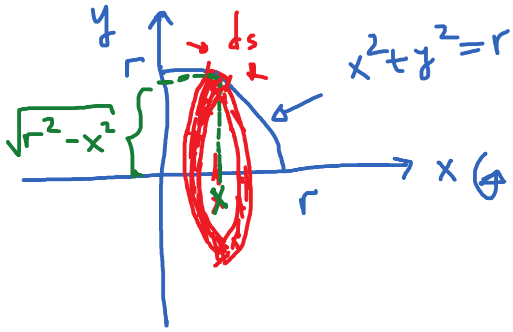
← Elde edilen yüzey

Not. Bu soru x değişken olacak şekilde de çözülebilir.
Dene!

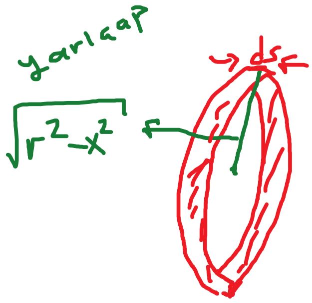
ÖRN 3 r yarıçaplı kürenin yüzey alanını bulunuz

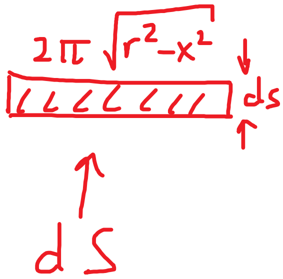
Çöz.





$x^2+y^2=r^2 \quad \left(y=\sqrt{r^2-x^2} \right)$





$$dS = 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\,ds$$

ds yi bulalım. $\quad y=\sqrt{r^2-x^2}=(r^2-x^2)^{1/2}$

$$y' = \frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{x^2}{r^2-x^2}+1} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$ds = \dfrac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$ olur

$$A(S) = 2\int_0^r dS = 2\int_0^r \underbrace{2\pi\sqrt{r^2-x^2}\,ds}_{dS}$$

$$= 4\pi\int_0^r \cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\,\underbrace{\frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}}dx}_{ds}$$

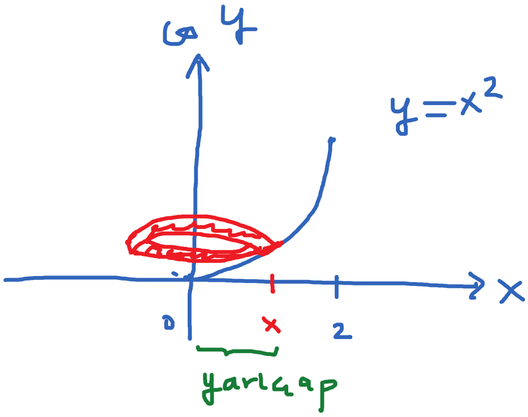
$$=4\pi\int_0^r r\,dx = 4\pi r\,x\Big|_{x=0}^{x=r}$$

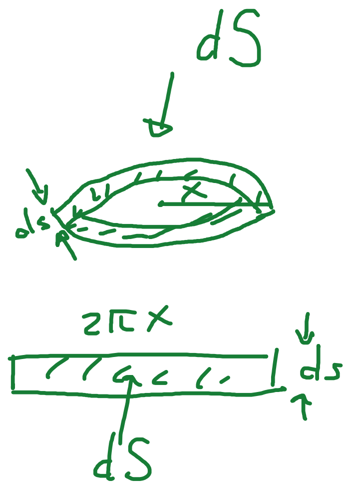
$$= 4\pi r^2$$

bulunur.

ÖRN 4 [0,2] aralığında, $y=x^2$ parabolünün y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin yüzey alanını bulunuz

Çözüm.





$$dS = 2\pi x \, ds$$

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

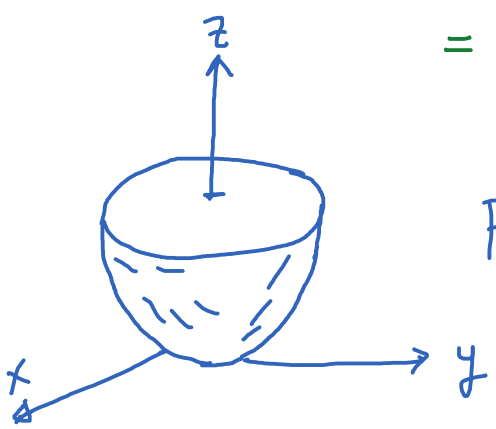
$$dS = 2\pi x \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$A(S) = \int_0^2 dS = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^{17} \sqrt{u}\, \frac{du}{8}$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = 1+4x^2 & , x=0 \Rightarrow u=1 \\ du = 8x\,dx & , x=2 \Rightarrow u=17 \end{array} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^{17} = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 1\right)$$



Paraboloid //

ÖRN5. $[1,2]$ aralığında $y=x$ fonksiyonunun x-ekseni döndürülmesiyle elde edilen cismin yüzey alanını bulun

GÖZ ÖDEV

ÖRN 6 $[1,8]$ aralığında, $y = x^{2/3}$ ün $y=4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanını veren belirli integrali ifade ediniz.

ÇÖZ. ÖDEV