İstanbul Ticaret Üniversitesi
Mühendislik Matematiği II
Arasınav Soruları

İsim-Soyisim: Cevap Anahtarı
Numara:

Tarih ve Saat: 26.03.2019, 14.30
Yer: Küçükyalı, B114/B117

Uyarılar. Sınav süresi **70 dakika**dır. Toplam **4 sayfa** üzerinde **4 soru** vardır. Sınav **110 puan** üzerinden olup her bir sorunun puanı soruların yanında yazmaktadır. Çözümlerinizi basamak basamak yapıp soruların altındaki boşluklara okunaklı bir şekilde yazınız. Sadece sonuçlardan oluşan cevaplara puan verilmeyecektir. Başarılar dilerim.

(5+15+5) 1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ diferansiyel denklemi verilsin.

(a) Verilen denklemin tipini, mertebesini ve derecesini belirleyiniz.

1. mertebeden, 1. dereceden homojen diferansiyel denklem

(b) $y = xv$ dönüşümünü kullanarak verilen denklemin genel çözümünü elde ediniz.

$y = xv \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ dönüşümünü verilen denklemde yerine yazalım:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + \cancel{v}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{xv}$$

$$\Rightarrow v\,dv = \frac{1}{x}dx$$

ayrılabilir denklemi elde edilir. Buradan

$$\int v\,dv = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2\ln|x| + 2c$$

$$\Rightarrow y^2 = 2x^2\ln|x| + 2cx^2$$

kapalı formda yazılmış genel çözüm bulunur.

(c) Verilen denklemin $y(1) = -2$ başlangıç koşulu altındaki çözümü nedir?

$y(1) = -2$ başlangıç koşulundan

$$(-2)^2 = 2\ln 1 + 2c\,1^2$$

$$2 = c$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$y^2 = 2x^2\ln|x| + 4x^2$$

veya

$$y(x) = -\sqrt{2x^2\ln|x| + 4x^2}$$

çözümü elde edilir.

(5+10+15) 2. $(x+2)\sin y dx + x\cos y dy = 0$ diferansiyel denklemi verilsin.

(a) Verilen denklem tam mıdır? Gösteriniz.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= (x+2)\sin y \\ N(x,y) &= x\cos y \end{aligned}\right\} \quad M_y = (x+2)\cos y \neq \cos y = N_x$$

olduğundan denklem tam değildir.

(b) Verilen denklem için bir integral çarpanı bulunuz.

$$\frac{1}{N}(M_y - N_x) = \frac{(x+1)\cos y}{x\cos y} = \frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x}$$

dur ve integral çarpanı

$$I(x,y) = e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} = e^{x+\ln x} = xe^x$$

olarak bulunur.

(c) Bulduğunuz integral çarpanı yardımı ile diferansiyel denklemin genel çözümünü elde ediniz.

$$x(x+2)e^x \sin y\, dx + x^2 e^x \cos y\, dy = 0$$

denklemi tam olduğundan

$$df = x(x+2)e^x \sin y\, dx + x^2 e^x \cos y\, dy$$

o.ş. bir $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulabiliriz. Bunun için

$$f_x(x,y) = x(x+2)e^x \sin y \quad \cdots (1)$$

$$f_y(x,y) = x^2 e^x \cos y \quad \cdots (2)$$

denklemlerini ortak çözmeliyiz. Denklem (2)'yi y'ye göre integre edersek

$$(3) \cdots f(x,y) = x^2 e^x \int \cos y\, dy = x^2 e^x \sin y + h(x)$$

elde edilir. Denklem (3)'ün x'e göre türevi alınırsa

$$(4) \cdots f_x(x,y) = (2xe^x + x^2 e^x)\sin y + h'(x)$$

olur. Denklem (1) ve (4)'ten

$$\cancel{x(x+2)e^x \sin y} = \cancel{(2xe^x + x^2 e^x)\sin y} + h'(x)$$

$$0 = h'(x)$$

$$c = h(x)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak genel çözüm

şeklindedir. $f(x,y) = x^2 + e^x \sin y = c$

(5+10+15) 3.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4 y^{1/3} \tag{1}$$

diferansiyel denklemi verilsin.

(a) Denklemin tipini belirleyiniz.

$P(x) = -\frac{3}{x}$, $q(x) = x^4$ ve $n = 1/3$ olan bir Bernoulli denklemidir

(b) $z = y^{2/3}$ değişken değişimini yaparak, (1) denkleminin

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4$$

lineer denklemine dönüştüğünü gösteriniz.

$z = y^{2/3} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2}{3} y^{-1/3} \frac{dy}{dx}$ dönüşümünü

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} y = x^4 y^{1/3}$$

$$y^{-1/3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} y^{2/3} = x^4$$

denkleminde yerine yazarsak $\frac{3}{2}\frac{dz}{dx} - \frac{3}{x} z = x^4$ denklemi ve dolayısıyla $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = \frac{2}{3} x^4 \quad \dots (3)$ elde edilir.

(c) b şıkkından faydalanarak, (1) ile verilen denklemin genel çözümünü bulunuz.

Denklem (3) lineerdir. Dolayısıyla integral çarpanı

$$I(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} z\right) = \frac{2}{3}x^4 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{3}x^2$$

$$\frac{1}{x^2} z = \frac{2}{3}\int x^2 dx = \frac{2}{9}x^3 + c$$

$$z(x) = \frac{2}{9}x^5 + cx^2$$

$$y^{2/3} = \frac{2}{9}x^5 + cx^2$$

$$y(x) = \left(\frac{2}{9}x^5 + cx^2\right)^{3/2}$$

genel çözümü bulunur.

(10+15) 4.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y+1}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi verilsin.

(a) Çözümün varlığı ve tekliği hakkında ne söyleyebilirsiniz?

$f(x,y) = \frac{x}{y+1}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{(y+1)^2}$ fonksiyonları $(0,0)$ noktasını içeren bir dikdörtgensel bölgede ($y=-1$ doğrusunu içermemek şartıyla) süreklidirler. O halde, verilen problemin $x=0$ noktasını içeren bir aralıkta çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

(b) Verilen başlangıç değer probleminin çözümü varsa bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y+1} \Rightarrow (y+1)\,dy = x\,dx$$

$$\Rightarrow \int (y+1)\,dy = \int x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

O halde, $y^2 + 2y = x^2$ verilen problemin kapalı çözümüdür. Açık çözümü bulmak için

$$y^2 + 2y - x^2 = 0$$

quadratik denkleminin diskriminantından yararlanırsak

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+x^2}$$

bulunur. $y(0)=0$ başlangıç şartından

$$y(x) = -1 + \sqrt{1+x^2}$$

fonksiyonunun verilen problemin açık çözümü olduğu görülür.