

② KARIŞIM PROBLEMERİ

Karışım problemlerini modelleyen denklemler

t anındaki

$$\text{depodaki madde miktarının değişimi hızı} = \text{Giren madde miktarı} - \text{Çıkan madde miktarı}$$

fikrine dayanarak oluşturulur.

$$Q(t) = t \text{ anındaki depodaki madde miktarı}$$

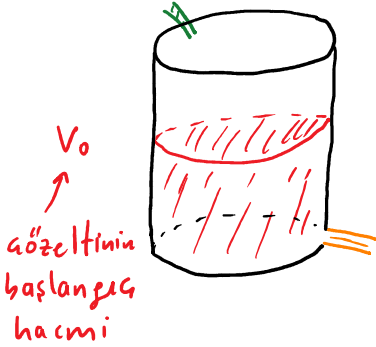
$$\frac{dQ}{dt} = t \text{ anındaki depodaki madde miktarının değişim hızı}$$

Yani, denklem $\frac{dQ}{dt} = \text{Giren madde miktarı} - \text{Çıkan madde miktarı}$ şeklindedir.

e L/dk giriş hızı (özeltinin)
 b kg/L madde miktarı (yoğunluk)

} \Rightarrow Demek ki, depoya 1 dakikada giren maddenin miktarı:

$$\left(e \frac{L}{dk}\right) \left(b \frac{kg}{L}\right) = eb \text{ kg/dk}$$



f L/dak çıkış hızı
 $\frac{Q(t)}{V(t)} \text{ kg/L}$

} \Rightarrow Depodan, 1 dakikada çıkan madde miktarı:

$$\left(f \frac{L}{dk}\right) \left(\frac{Q(t)}{V(t)} \frac{kg}{L}\right) = \frac{fQ}{V} \frac{kg}{dk}$$

• Herhangi bir t anında depodaki özeltinin hacmi:

$$V(t) = V_0 + et - ft \quad L \text{ (Litre)}$$

• Herhangi bir t anında depodaki maddenin yoğunluğu:

$$\frac{Q(t)}{V(t)} = \frac{Q(t)}{V_0 + et - ft} \quad \text{kg/L}$$

0 halde denklem

$$\frac{dQ}{dt} = eb - f \frac{Q}{V_0 + et - ft} \quad \text{veya}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0 + et - ft} Q = eb$$

şeklindeki bir lineer denklemdir.

Q fonksiyon, t değişken diğerlerinin hepsi sabit

ÖRN1. Bir depoda, 5000L suda çözülmüş 20 kg tuz vardır. Litrede 0.03 kg tuz içeren tuzlu su, 25 L/dak hızla depoya girmektedir. Çözelti her zaman iyice karıştırılmış durumdadır ve aynı hızla depodan girmektedir.

a) Karışım sürecini tanımlayan bir model oluşturunuz.

b) 30 dak sonra depoda ne kadar tuz kalır?

c) Uzun süre sonra ($t \rightarrow \infty$ iken) depodaki tuz miktarı ne olur?

çöz. a) $Q(t)$ = t anında depodaki tuz miktarı (kg cinsinden)
 $Q(0) = 20$ kg ← başlangıç anında çözeltideki tuz miktarı



Çözeltinin giriş ve çıkış hızları aynı olduğundan depodaki çözeltinin hacmi hep $V(t) = 5000$ L olur.

$$\frac{Q(t)}{5000} = t \text{ anında depodaki tuzun yoğunluğu}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \text{Giren tuz miktarı} - \text{Çıkan tuz miktarı} \\ &= \left(0.03 \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right) \left(25 \frac{\text{L}}{\text{dak}}\right) - \left(\frac{Q}{5000} \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right) \left(25 \frac{\text{L}}{\text{dak}}\right) \\ &= 0.75 - \frac{Q(t)}{200} \end{aligned}$$

Yani,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{150 - Q}{200}$$

ayrılabilir denkleme elde edilir. Yani, model şu şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = \frac{150 - Q}{200} \\ Q(0) = 20 \end{cases}$$

b) Modeli oluşturan denklem ayrılabilir ve çözüme şu şekilde ulaşılır:

$$\frac{dQ}{150-Q} = \frac{1}{200} dt$$

$$\int \frac{1}{150-Q} dQ = \frac{1}{200} dt \Rightarrow -\ln |150-Q| = \frac{t}{200} + C_1$$

$$Q(0) = 20 \Rightarrow -\ln |150-20| = \frac{0}{200} + C_1$$

$$\Rightarrow -\ln |130| = C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = -\ln 130$$

Buradan,

$$\ln |150-Q| = -\frac{t}{200} + \ln 30$$

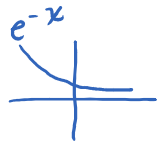
$$150-Q = e^{-t/200 + \ln 30} = e^{\ln 30} \cdot e^{-t/200}$$

$$Q(t) = 150 - 30 e^{-t/200}$$

bulunur. 30 dakika sonraki tuz miktarı yaklaşık olarak

$$Q(30) = 150 - 30 e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$

olur.



$$c) Q_L = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (150 - 30 e^{-t/200}) = 150 \text{ kg}$$

Bu beklenen bir sonuçtur, çünkü depodaki çözelti hacmi 5000 L dir ve çözeltideki tuz yoğunluğu çok uzun süre sonra giriş yoğunluğu olan 0.03 kg/L olacağından, uzun süre sonra depodaki tuz miktarının $5000 (0.03) = 150 \text{ kg}$ olması beklenir.

Bu bize öngörülen ile denklemin çözümünün tutarlı davrandığını gösterir.

ÖRNEK 2. 50 litrelik bir depoda 10 litre saf su vardır. Depoya 4 L/dak hızla içinde 1 gr/L tuz içeren tuzlu su pompalanmaktadır. Depodaki tuzlu su karıştırılarak homojenliği sağlanmıştır ve karışım 2 L/dak hızla deponun dışına pompalanmaktadır.

- Karışım sürecini tanımlayan bir model oluşturunuz.
- Herhangi bir t anında depodaki tuz miktarı $Q(t)$ nedir?
- Deponun taşacağı zamanı ve taşıdığı andaki depodaki tuz miktarını bulunuz.

ÖRN 3 20 000 litrelik bir tankta, 50 kg a z lm ş tuz ieren 1000 litrelik tuzlu su bulunmaktadır. Litrede 0.05 kg tuz ieren tuzlu su 5 L/dak hızla, litrede 0.04 kg tuz ieren tuzlu su ise 10 L/dak hızla tanka pompalanmaktadır. İyice karıştırılan a zelti 12 L/dak hızla tanktan boşaltılmaktadır.

- Karışım s recini tanımlayan bir model oluşturunuz.
- Herhangi bir t anında depodaki tuz miktarı $Q(t)$ nedir?
- Deponun taşacağı zamanı ve taştığı andaki depodaki tuz miktarını bulunuz.

ÖRNEK. Bir tankta 300 L temiz su vardır. 1 kg/L, suda çözülebilir aım gübresi içeren bir çözelti 4 L/dak hızla tanka akmaktadır ve karışım 11 L/dak hızla tankın dışına pompalanmaktadır.

a) Süreci ifade eden modeli oluşturunuz.

b) Tankta maksimum gübre miktarına ne zaman ulaşılır ve bu miktar ne kadardır?

ÖRNEK 5. Bir petrol rafinerisindeki depolama tankında başlangıçta 445 kg katkı maddesi olan 7520 litre benzin vardır. Kış mevsimi hazırlıklarında her litrede 2 kg katkı içeren benzin, 150 L'dak hızla tank içine pompalanmaktadır. Aynı şekilde karıştırılmış gözetli 170 L'dak hızla dışarı pompalanmaktadır.

- Süreci tanımlayan modeli kurunuz.
- 20 dakika sonra tank içindeki katkı maddesi ne kadardır?
- Uzun süre sonunda tankta katkı maddesi miktarı ne olur?