Hatırlatma (Lineer Denklemler)

$$P(x)\,y' + Q(x)\,y = G(x)$$

$$y' + p(x)\,y = g(x)$$ ← 1. mertebeden lineer (tam değil)

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$ ← integral çarpanı

$$\underbrace{I(x)\,y' + I(x)\,p(x)\,y}_{(Iy)'} = I(x)\,g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(Iy) = Ig$$

$$Iy = \int I(x)g(x)\,dx + C$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\int I(x)g(x)\,dx + \frac{C}{I(x)}$$

genel çözüm

açık olarak verilmiş

Not. Lineer denklemlerdeki tüm genel çözümler açık çözüm olarak yazılabilir.

ÖRN 1. $y' - 3y = 6$ denkleminin genel çözümünü bulun ve genel çözümdeki c sabitine değerler vererek birkaç özel çözümün grafiğini çiziniz.

Çöz $y' - 3y = 6$, $p(x) = -3$, $g(x) = 6$

olan lineer bir denklemdir. İntegral çarpanı

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int 3dx} = e^{-3x}$$

dur.

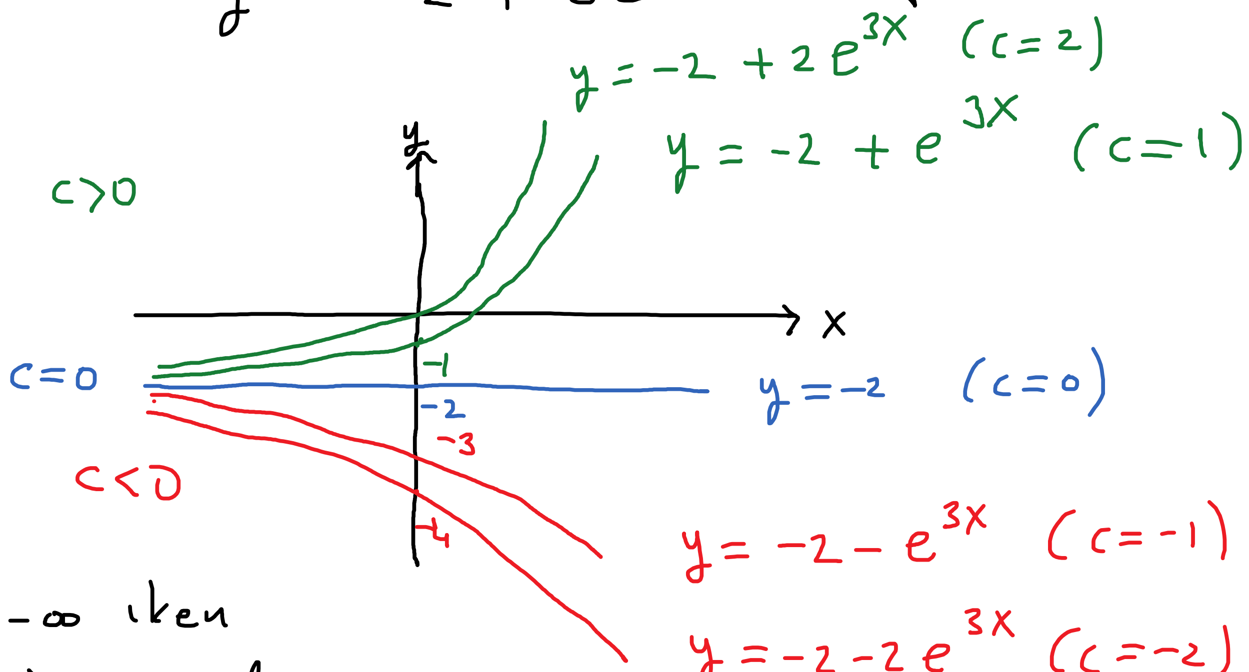
$$e^{-3x}(y' - 3y) = e^{-3x}6$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-3x} \cdot y\right) = 6e^{-3x}$$

$$e^{-3x}y = \int 6e^{-3x}dx = 6\frac{e^{-3x}}{-3} + c$$

$$e^{-3x}y = -2e^{-3x} + c$$

$$y = -2 + ce^{3x} \quad \leftarrow \text{genel çözüm}$$



- $x \to -\infty$ iken $y \to -2$ olur
- $x \to \infty$ iken $c>0$ ise $y \to \infty$, $c<0$ ise $y \to -\infty$ dur.

ÖRN 2 $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^2}y = x\cos x$, $x>0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çöz Denklemi x ile çarpalım.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2\cos x \quad \leftarrow \text{lineer denklem}$$

$$I(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2}$$

integral çarpanı

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y\right) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \cos x$$

$$\frac{1}{x^2}y = \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$y(x) = x^2\sin x + Cx^2 \quad \leftarrow \text{genel çözüm}$$

$x>0$ için geçerlidir çünkü denklemin katsayıları $x=0$ da tanımsızdır. Yani çözüm $(0,\infty)$ aralığında geçerlidir.

Ödev Neden. Çözüm $\mathbb{R}\setminus\{0\}$'da geçerlidir demek yerine, neden çözümün $(0,\infty)$ veya $(-\infty,0)$ aralığında geçerli olduğu söylenir? (Ödev)

ÖRN3 $y^2dx + (3xy-1)\,dy = 0$ dif. denk. genel çözümü nedir?

Çöz. $(3xy-1)\,dy = -y^2dx \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y^2}{3xy-1}$

denklemi y'ye göre lineer değildir, ancak

$$y^2\frac{dx}{dy} + 3xy - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{3xy-1}{y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \underbrace{\frac{3}{y}}_{=p(y)}x = \underbrace{\frac{1}{y^2}}_{=g(y)} \quad \text{---} (*)$$

denklem x'e göre lineerdir.

$x = x(y)$ olarak düşünüyoruz.

$$I(y) = e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{3\ln|y|} = y^3$$

integral çarpanı ile (*) denklemini çarpalım

$$y^3\left(x' + \frac{3}{y}x\right) = \frac{y^3}{y^2} = y$$

$$\frac{d}{dy}\left(y^3 . x\right) = y$$

Son eşitliği y'ye göre integre edersek

$$y^3x = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c$$

$$x(y) = \frac{1}{2y} + \frac{c}{y^3} \leftarrow \text{genel çözüm}$$

açık çözüm olarak elde edilmiş

Alıştırmalar

① $\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ başlangıç değer problemini çözünüz ve birkaç çözümün grafiğini çiziniz. $x \to \infty$ iken çözümlerin davranışlarını tartışınız.

② $\begin{cases} z' - xz = -x \\ z(0) = -4 \end{cases}$ problemini çözünüz.

③ $ty' + 2y = \sin t$ denkleminin genel çözümünü bulup, genel çözümün $t \to \infty$ iken davranışını inceleyiniz.

④ Aşağıdaki denklemleri çözünüz

a) $y' = \dfrac{1}{y^3 - 2xy}$ $\quad\left[\text{cvp: } x = \dfrac{y^2-1}{2} + ce^{-y^2}\right]$

b) $xy' + y = x^3 + 2x$ $\quad\left[\text{cvp: } y = \dfrac{x^3}{4} + x + \dfrac{c}{x}\right]$

c) $(1-x^2)y' + xy = x$ $\quad\left[\text{cvp: } y = 1 + c\sqrt{1-x^2}\right]$

d) $y' = \dfrac{1}{y-x}$ $\quad\left[\text{cvp. } x = y - 1 + ce^{-y}\right]$

e) $(1+x^2)\,dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$ $\quad\left[\text{cvp: } y(1+x^2) + \ln(\cos x) = c\right]$

Lineer ve Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri Arasındaki Bazı Farklar

Lineer Denklem	Lineer Olmayan Denklem
$\begin{cases} y' + p(x)\, y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
• Çözüm, p ve g katsayılarının sürekli olduğu $x = x_0$ noktasını içeren herhangi bir aralıkta var.	• Çözümü bulmadan çözümün geçerli olduğu en geniş aralığı bulmak zordur.
• Tüm olası çözümler genel çözümden elde edilebilir.	• Genel çözümlerden elde edilemeyen çözümler olabilir. Bu çözümlere tekil çözüm denir.
• Çözüm fonksiyonunun tekillikleri p ve g katsayılarının süreksizlik noktalarıdır.	• Çözümün tekillikleri denklemi çözdükten sonra elde edilen çözümün incelenmesi ile bulunabilir.
• Çözüm açıkça, yani $y = \phi(x)$ şeklinde ifade edilebilir.	• Çözüm genelde kapalı formda yazılabilir. Yani $y = \phi(x)$ çözümü tarafından sağlanan x ve y'yi içeren bir denklem bulunur. $F(x,y) = 0$.

Bernoulli Diferansiyel Denklemler

Tanım. $n \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n \quad \cdots (*)$$

lineerliği bozar

formuna sahip 1. mertebeden dif denk. Bernoulli dif. denk. denir

Uyarı. Bu denklem $n=0$ ve $n=1$ durumunda lineerdir. (1695 yılında James Bernoulli tarafından ortaya atılmış, daha sonra kardeşi John Bernoulli tarafından çözülmüştür.)

ÇÖZÜM YÖNTEMİ: Bernoulli denklemi, $z = y^{1-n}$ dönüşümü ile lineer denkleme indirgenir ve çözüme ulaşılır. Bu çözüm tekniği Leibniz tarafından 1696'da bulunmuş.

Peki neden $z = y^{1-n}$ $(n \neq 0,1)$ dönüşümü?

$(*)$ denklemini y^n ye bölersek

$$\underbrace{y^{-n}\frac{dy}{dx}}_{\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}} + p(x)\,\underbrace{y^{1-n}}_{=z} = q(x) \quad \cdots (**)$$

olur. Diğer yandan, zincir kuralı yardımı ile

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx} \qquad \left(\Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}\right)$$

olur ve $(**)$ denklemi z'ye göre lineer

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = q(x)$$

denklemine indirgenir ve çözüme nasıl ulaşılacağı biliniyor.

ÖRN1 $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2} x y^3$ denkleminin genel çözümü?

Çöz Bu $p(x) = -5$, $q(x) = -\frac{5}{2}x$ ve $n=3$ olan bir Bernoulli denklemidir. O halde $z = y^{1-3} = y^{-2}$ dönüşümü yapmalıyız. Verilen denklemi y^3 ile sadeleştirelim:

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x \quad \cdots \quad (*)$$

$z = y^{-2}$ ise $\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ olur.

(*) denkleminde yerine yazalım:

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - 5z = -\frac{5}{2}x \Rightarrow \frac{dz}{dx} + \underset{p(x)}{10}\,z = 5x$$

z'ye göre lineer

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 10\,dx} = e^{10x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{10x} z\right) = 5x\,e^{10x}$$

$$e^{10x} z = \int 5x\,e^{10x}dx \overset{K.İ.}{=} \frac{x}{2}e^{10x} - \frac{1}{20}e^{10x} + C$$

$$z(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}$$

$z = y^{-2}$ olduğundan genel çözüm

$$y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}$$ olur

Dikkatli bakıldığında $y \equiv 0$ fonksiyonu verilen denklemi çözer ama genel çözümden elde edilemez

ÖRN2. $y' + ty - t\sqrt{y} = 0$ denkleminin genel çözümünü bulup, genel çözümün $t \to \infty$ iken davranışını inceleyiniz.

Çöz. $y' + ty = t y^{1/2}$ $\quad n = 1/2$

$y^{1/2}$'ye böl

$$y^{-1/2} y' + t y^{1/2} = t \quad \ldots (*)$$

$y^{1/2} = z$

$z = z(t), \quad y = y(t)$

$$z = y^{1-n} \underset{n=1/2}{=} y^{1/2} \quad \text{ise} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{olur.}$$

(*) denkleminde bulduklarımızı yerine yazalım

$$2\frac{dz}{dt} + tz = t$$

$$\frac{dz}{dt} + \frac{t}{2} z = \frac{t}{2} \quad \leftarrow \text{z'ye göre lineer}$$

$p(t) = \frac{t}{2}$, $z = z(t)$

$$I(t) = e^{\int \frac{t}{2} dt} = e^{t^2/4} \quad \leftarrow \text{integral çarpanı}$$

$$\underbrace{e^{t^2/4}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{t}{2} z\right)}_{\frac{d}{dt}\left(e^{t^2/4} z\right)} = \frac{t}{2} e^{t^2/4}$$

t'ye göre integre edersek

$u = \frac{t^2}{4}, \quad du = \frac{t}{2} dt$

$$e^{t^2/4} z = \int \frac{t}{2} e^{t^2/4} dt = e^{t^2/4} + c$$

$$z = 1 + c e^{-t^2/4}$$

$z = y^{1/2}$ olduğundan verilen denklemin genel çözümü

$$y^{1/2} = 1 + c e^{-t^2/4} \quad \text{veya} \quad y = \left(1 + c e^{-t^2/4}\right)^2$$

olur. $t \to \infty$ iken $e^{-t^2/4} \to 0$ olacağından $y \to 1$ dir.

ÖRN3. $\begin{cases} y' + \frac{2}{x} y = -x^9 y^5 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$ Başlangıç-değer probleminin varsa çözümünü bulunuz.

ÇÖZ Verilen denklem $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = -x^9$ ve $n=5$ olan Bernoulli denklemidir.

$= z$ diyelim

$$y' + \frac{2}{x} y = -x^9 y^5 \Rightarrow y^{-5} y' + \frac{2}{x} y^{-4} = -x^9$$

$z = y^{-4}$ dersek, $\frac{dz}{dx} = -4 y^{-5} \frac{dy}{dx}$ olur ve son denklem

$$-\frac{1}{4}\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x} z = -x^9 \quad \text{veya} \quad \frac{dz}{dx} - \frac{8}{x} z = 4x^9$$

halini alır. Bu denklem için integral çarpan

$$I(x) = e^{\int -8/x \, dx} = e^{-8 \ln|x|} = \frac{1}{x^8}$$

dir ve

$$\frac{1}{x^8}\left(\frac{dz}{dx} - \frac{8}{x} z \right) = 4x \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^8} z \right) = 4x$$

olur. Buradan çözüm

$$\frac{1}{x^8} z = \int 4x \, dx = 2x^2 + c \Rightarrow z = 2x^{10} + c x^8$$

$$\Rightarrow y^{-4} = 2x^{10} + c x^8$$

bulunur. $y(-1) = 2$ başlangıç koşulundan

$$2^{-4} = 2(-1)^{10} + c(-1)^8 \Rightarrow c = -\frac{31}{16}$$

olur ve problemin çözümü

$$y = \frac{1}{\left(2x^{10} - \frac{31}{16} x^8\right)^{1/4}}$$ bulunur

Alıştırma Aşağıda verilen denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

1) $y' - \frac{3}{x} y = x^4 y^{1/3}$ $\left[\text{cvp}: y = \mp\left(cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right)^{\frac{3}{2}}\right]$

2) $xy' + y = y^2 \ln x$ $\left[\text{cvp}: y = (1 + \ln x + cx)^{-1}\right]$

3) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x} y = -2x^4 y^4$ $\left[\text{cvp}: \left(y = \frac{1}{x^5 + \frac{c}{x}}\right)^{1/3}\right]$

4) $xy' + y^2 = 2y$ $\left[\text{cvp}: y = 2 + \frac{2}{cx^2 - 1}\right]$

5) $y' + 2xy = e^{x^2} y$ $\left[\text{cvp}: y = \frac{-1}{(x+c)\, e^{x^2}}\right]$