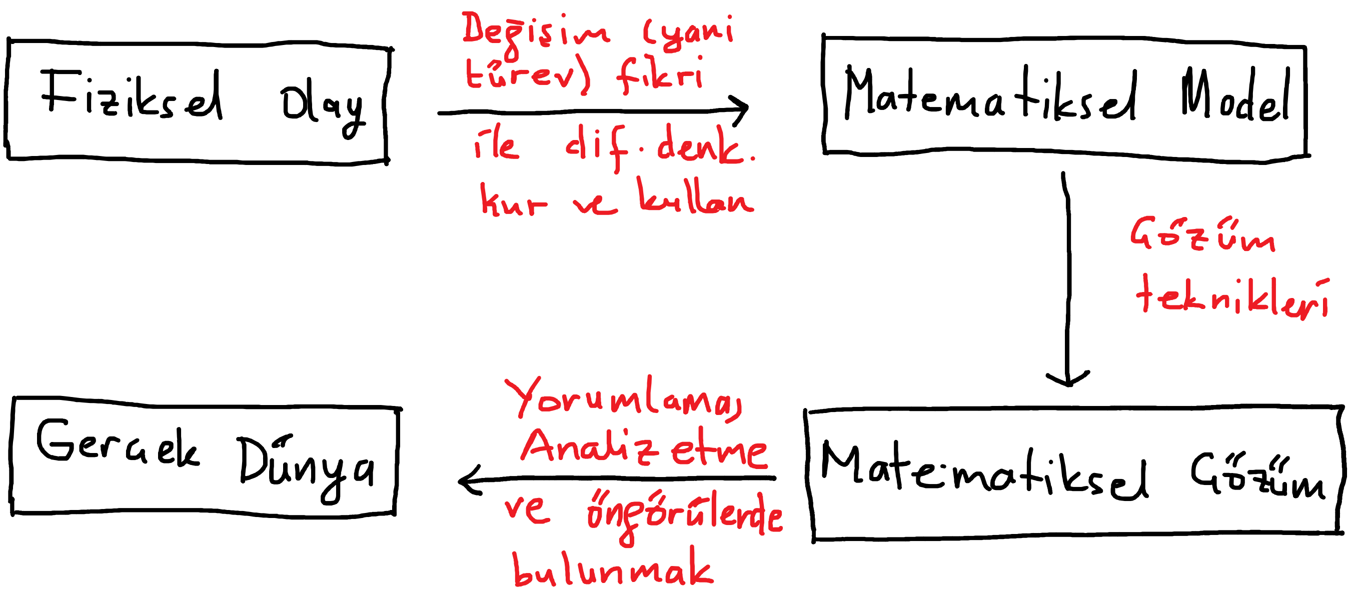
Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerle Modelleme :

Amaç. Zamana bağlı fiziksel süreçleri diferansiyel denklemler yardımı ile matematiksel olarak ifade etmek ve daha sonra elde edilen matematiksel modeli çözümleyip fiziksel olaylar hakkında çeşitli analizler yapmak ve öngörülerde bulunmaktır.



Modeli oluştururken şu adımları takip etmeliyiz:

1. Fiziksel gerçekliği ve varsayımları ifade et.
2. Tüm nicelikleri sembollerle göster.
3. Fiziksel olaydaki değişim fikrini, yani türevi, kullanarak bir diferansiyel denklem elde et.
4. Diferansiyel denklemi çöz.
5. Çözümü analiz et, yorumla ve fiziksel süreç ile ilgili çeşitli öngörülerde bulun.

Uyarı. Gerçek gözlemler ve bir matematiksel modelin tahminleri arasındaki fark çok büyük ise modeli iyileştirmeyi, daha dikkatli gözlemler yapmayı veya her ikisini de düşünmelisiniz.

Ne gibi fiziksel olayları modelleyeceğiz?

1. Artma ve Azalma Problemleri
   - Nüfus artışı için modeller
     - İdeal koşullarda bir model
     - Daha gerçekçi bir model (Lojistik diferansiyel denk.)

2. Karışım Problemleri

3. Sıcaklık Problemleri

4. Serbest Düşme Problemleri

5. Elektrik Devreleri

① ARTMA ve AZALMA PROBLEMLERİ

A) Nüfus Modeli (İdeal Koşullar Altında):

Amaç: İdeal koşullarda (yani sınırsız çevrenin, yeterli yiyeceğin, avcıların yokluğunun ve hastalıklara karşı bağışıklığın v.b. olduğu koşullarda) nüfus artışı modeli oluşturmak.

Fiziksel prensip: Nüfus artış hızı nüfusun büyüklüğü ile orantılıdır.

Gösterimler: t = zaman, N = nüfus, r = oran sabiti

Model:

$$\underbrace{\boxed{\frac{dN}{dt}}}_{\text{nüfus artış hızı}} = r \overbrace{N}^{\text{nüfusun büyüklüğü}}, \quad N(0) = N_0 \text{ başlangıç nüfusu}$$

Denklemin Yorumu:

- $N_0 \neq 0$ ise, her t için $N(t) > 0$ olur. Dolayısıyla $r > 0$ ise her t için $\frac{dN}{dt} > 0$ 'dır. Bu, nüfusun sürekli arttığı anlamına gelir.

- N arttıkça $\frac{dN}{dt}$ de artar. Yani, nüfus arttıkça artış hızı da artar.

Denklemin Çözümü: $\frac{dN}{dt} = rN$ denklemi hem ayrılabilir hem de lineerdir. Denklemin genel çözümü

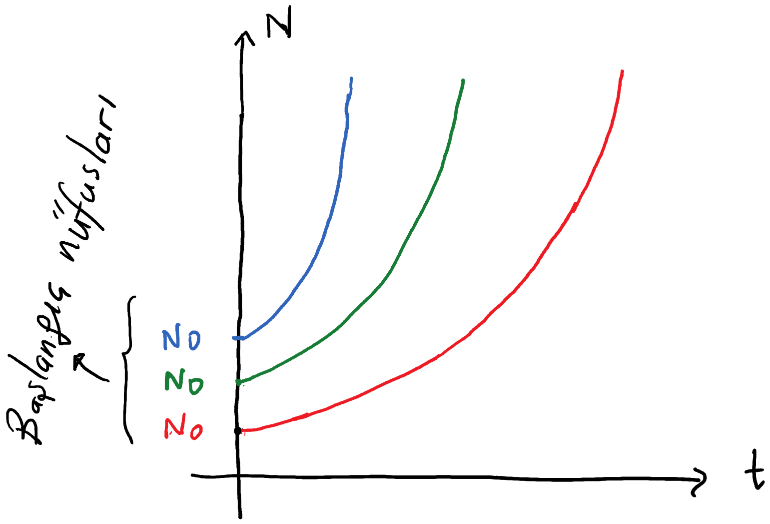
$$N(t) = c e^{rt}$$

olarak elde edilir (Göster.). $N(0) = N_0 > 0$ başlangıç nüfusundan $N_0 = c e^0 = c$ olarak bulunur. Dolayısıyla, modelin çözümü

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

şeklindeki üstel fonksiyon olur.

$$N(t) = N_0 \, e^{rt}$$



Dikkat edilirse, nüfus arttıkça nüfustaki artış daha hızlı oluyor. Diğer yandan, başlangıç nüfusu da ilk nüfus artış hızında etkili.

$r > 0$ ve $t \geq 0$ için farklı başlangıç değerleri ile verilmiş $N(t) = N_0 e^{rt}$ çözümlerinin ailesi

Not. $\dfrac{dN}{dt} = rN$ denkleminden $r = \dfrac{dN/dt}{N}$ olarak yazılabilir. Burada r, büyüme hızının nüfusa oranıdır, ve "bağıl artış oranı" olarak adlandırılır. Örneğin,

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}02\, N$$

ise, ve t yıl olarak ölçülmüşse, bağıl artış hızı $r = 0{,}02$ dir ve nüfus her yıl %2 oranında artar.

ÖRN 1. Toplam nüfusu 30 000 olan bir ilçenin nüfus artış oranı % 1,2 olduğuna göre, bölgenin 10 yıl sonraki nüfusu ne dur?

Çöz. t = zaman (yıl cinsinden), $N(t)$ = t anındaki nüfus

$r = \%1,2 = \frac{12}{1000} = \frac{3}{250}$ "nüfus artış oranı" $N(0) = 30\,000$ verilmiş

Nüfus artışı için denklem

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3}{250} N$$

dur. Bu denklem ayrılabilirdir: $\frac{dN}{N} = \frac{3}{250}\, dt$

$$\int \frac{1}{N}\, dN = \frac{3}{250} \int dt \Rightarrow \ln|N| = \frac{3}{250} t + c_1$$

$$\Rightarrow N(t) = e^{3/250\, t} \cdot e^{c_1} \quad (c = e^{c_1})$$

$$= c\, e^{3/250\, t} \leftarrow \text{genel çözüm}$$

Şimdi, $N(0) = 30\,000$ başlangıç nüfusundan

$$30\,000 = c\, e^0 = c$$

olur. Bu durumda, problemin çözümü

$$N(t) = 30\,000\, e^{\frac{3}{250} t}$$

dir. Dolayısıyla, 10 yıl sonraki nüfus

$$N(10) = 30\,000\, e^{\frac{3}{250}(10)} = 30\,000\, e^{3/25}$$

$$\approx 33\,824$$

olur.

ÖRN 2 Bir şehrin nüfusunun, o anda şehirde yaşayan insanların sayısıyla orantılı bir hızla arttığı biliniyor. Eğer nüfus 2 yıl sonra 2 katına çıkıyorsa ve 3 yıl sonra nüfus 200 000 ise başlangıçta şehirde kaç kişinin yaşadığını bulunuz.

Çöz. $N(t)$ = t anında şehirdeki insan sayısı

$N(0) = N_0$ başlangıçta şehirde yaşayan insan sayısı

r = oran sabiti

O halde, $\dfrac{dN}{dt} = rN$ denklemini yazarız ve bu denklemin çözümü

$$N(t) = c\,e^{rt}$$

şeklindedir. (Göster). $t=0$'da $N=N_0$ olduğundan $c = N_0$'dır. Böylece, çözüm

$$N(t) = N_0\, e^{rt}$$

dir. Diğer yandan, $t=2$ için $N(2) = 2N_0$ ise

$$2\cancel{N_0} = \cancel{N_0}\, e^{2r} \quad \text{veya} \quad 2 = e^{2r} \quad \text{veya} \quad \ln 2 = 2r \quad \text{veya} \quad r = \frac{\ln 2}{2}$$

elde edilir. Buradan

$$N(t) = N_0\, e^{\frac{\ln 2}{2} t} = N_0\, e^{0.347t}$$

bulunur. Son olarak, $t=3$ iken $N = 200\,000$ olduğunu kullanırsak

$$200\,000 = N_0\, e^{0.347(3)}$$
$$\cong N_0\,(2,8320)$$

veya

$$N_0 = \frac{200\,000}{2.8320} \cong 70\,620 \text{ kişi}$$

başlangıç nüfusunu buluruz.

ÖRN3. Bir bakteri kültürünün artış hızı, o andaki bakteri sayısı ile orantılıdır. Bu kültürde başlangıçta 10 bakteri ve 2 saniye sonra 40 bakteri varsa 5 dk sonra kaç bakteri olur?

ÇÖZ. t = zaman (saniye cinsinden), $N(t)$ = bakteri sayısı, r = orantı sabiti

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad \text{dif. denk.}$$

$$N(0) = 10 \quad \text{başlangıç değeri}$$

Soru: $N(2) = 40$ ise $N(300) = ?$ $(5\,dk = 300\,sn)$

Dif. denkleminin genel çözümü $N(t) = c\,e^{rt}$ dir.

$N(0)=10$ başlangıç koşulundan

$$10 = c\,e^{0} = c$$

olarak bulunur ve çözüm $N(t) = 10\,e^{rt}$ olur. $N(2)=40$ koşulundan, r nüfus artış oranı

$$40 = 10\,e^{2r} \quad \text{veya} \quad 4 = e^{2r}$$

$$\text{veya} \quad \ln 4 = \ln e^{2r} = 2r \cancel{\ln e} = 2r$$

$$\text{veya} \quad r = \frac{1}{2}\ln 4$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözüm fonksiyonu

$$N(t) = 10\,e^{\frac{t}{2}\ln 4} = 10\,e^{\ln (4)^{t/2}} = 10\,e^{\ln 2^t}$$

$$= 10\,e^{\ln(2^t)} = 10\,2^t$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, 5 dk (300 sn) sonra bakteri sayısı

$$N(300) = 10\,2^{300}$$

olarak hesaplanır. Bakteri sayısı çok hızlı artmaktadır. Bu şaşırtıcı olmasa gerek.

ÖRN4. Bir radyoaktif madde, kalan madde ile orantılı hızla bozunmaktadır. 100 gr radyoaktif madde 1 saat sonra 80 gr a iniyorsa

a) herhangi bir t anında çözülen madde miktarını bulunuz.

b) maddenin yarılanma ömrünü bulunuz.

Çöz. a) t = zaman (saat cinsinden) , $N(t)$ = t anındaki madde miktarı

r = orantı sabiti

Bu bir azalma problemidir ve denklem

$$\frac{dN}{dt} = -rN$$

dir. $N(0) = 100$ ile $N(1) = 80$ olduğu biliniyor. Ayrılabilir olan denklemin çözümü

=c diyelim

$$\frac{dN}{N} = -r\,dt \Rightarrow \int \frac{1}{N}\,dN = -r\int dt \Rightarrow \ln|N| = -rt + c_1$$

$$\Rightarrow N = e^{-rt+c_1} = e^{c_1}e^{-rt} = ce^{-rt}$$

olarak bulunur. $N(0) = 100$ koşulundan $c = 100$ ve $N(1) = 80$ koşulundan $r = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$ elde edilir. Böylece, herhangi bir t anındaki kalan madde miktarı

$$N(t) = 100\, e^{-t\ln\left(\frac{5}{4}\right)} = 100\, e^{\ln\left(\frac{4}{5}\right)^t} = 100\left(\frac{4}{5}\right)^t$$

şeklindedir.

başlangıçtaki miktarın yarısı

b) Yarılanma ömrü; $N(t) = 50$ eşitliği hangi t için sağlanır demektir. Yani,

$$N(t) = 100\left(\frac{4}{5}\right)^t$$

$$50 = 100\left(\frac{4}{5}\right)^t$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = t\ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}{\ln\left(1/2\right)} \cong 3{,}01 \text{ saat}$$

sonra yarılanma olur.