(B) Lojistik Model (Daha Gerçekçi Bir Nüfus Modeli)

Amaç: Kaynakların kısıtlı olduğu bir çevrede nüfus modeli kurmak.

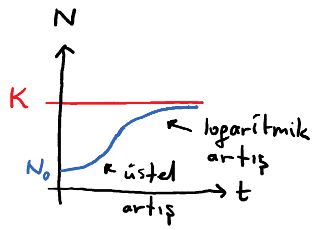
Fiziksel Prensip: Nüfus artış hızı ilk zamanlarda nüfusun büyüklüğü ile doğru orantılı olsun. (Yani, nüfus ilk zamanlarda üstel olarak artsın.) Ancak kaynaklar sınırlı olduğundan zamanla nüfus artış hızı yavaşlasın ve bir değere yakınsasın.

Gösterim. t = zaman, $N(t)$ = nüfus, r = orantı sabiti

N_0 = başlangıç nüfusu, K = nüfus taşıma kapasitesi

Şimdi fiziksel varsayımları matematiksel olarak yazalım:

- $N_0 << K$ ise $\dfrac{dN}{dt} = rN$ olsun.
- $0 < N_0 < K$ ve $N \to K$ ise $\dfrac{dN}{dt} \to 0$ olsun
- $N_0 > K$ ise $\dfrac{dN}{dt} < 0$ olsun.

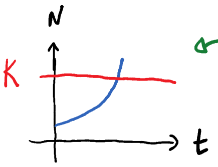


Şimdi bu eğilimleri dikkate alarak dif. denk. oluşturalım:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$N_0 << K$ ise bu terim 1'e yaklaşmalıdır, çünkü $\frac{dN}{dt} = rN$ olmalı

$N_0 < K$ ve $N \to K$ ise bu terim 0'a yaklaşmalı çünkü $\frac{dN}{dt} \to 0$ olmalıdır.

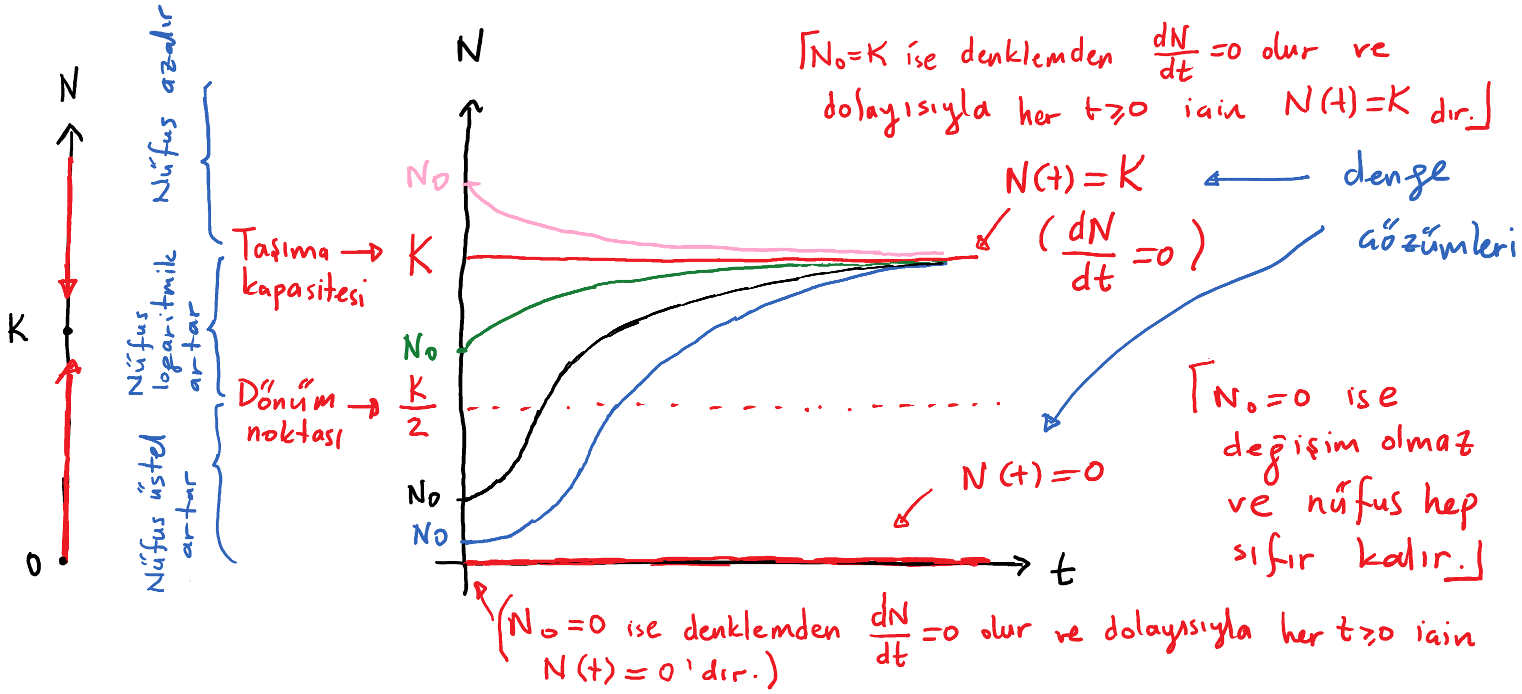


$\frac{dN}{dt} = rN$ ile başlamak iyi fikir.

"Lojistik Denklem"

1840 - Hollandalı matematiksel biyolog Verhust

Şimdi fiziksel varsayımlarımızı dikkate alarak çeşitli başlangıç nüfusları ile verilen nüfus eğrilerini çizelim:



Lojistik denklemin çözümlerinin grafiği

Görüldüğü üzere nüfus ilk zamanlarda ($0 < N_0 < \frac{K}{2}$ ise) üstel olarak artıyor, ancak kaynaklar sınırlı olduğundan ($\frac{K}{2} < N_0 < K$ ise) nüfus artış hızı yavaşlar ve nüfus taşıma kapasitesine yaklaşır. İlk nüfus, taşıma kapasitesinin üzerinde ise ($N_0 > K$ ise) nüfus azalarak K'ya yaklaşır.

Denklemin Yorumu. $$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- $N_0 << K$ ise $\frac{N}{K} \to 0$ ve dolayısıyla $\frac{dN}{dt} \to rN$ olur.

- $\frac{K}{2} < N_0 < K$ ve $N \to K$ ise $\frac{N}{K} \to 1$ ve dolayısıyla $\frac{dN}{dt} \to 0$ olur. Nüfus artar ancak K'ya yaklaştıkça gittikçe yavaşlayarak artar.

- $N_0 > K$ ise $\frac{dN}{dt} < 0$'dır ve nüfus azalarak K'ya yaklaşır.

Peki nüfus artış hızındaki yavaşlama neden $\frac{K}{2}$ noktasında başlıyor? Bu noktayı nasıl belirledik?

ÖDV. İpucu: $f(N) = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$ dersek $\frac{dN}{dt} = f(N)$ olur.

f fonk. grafiği paraboldür. Bu grafiği analiz edin.

Lojistik denklemin çözümü: $N<K$ olsun.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) \quad \text{--- } (*)$$

İlk olarak, $N(t)=0$ ve $N(t)=K$ sabit fonksiyonları birer çözümdür. Bu iki çözüme denge çözümleri denir.

(*) denklemi ayrılabilirdir. Şimdi çözelim:

$$\frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = r\,dt \Rightarrow \int \frac{1}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)}\,dN = \int r\,dt$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}\right) dN = r\int dt$$

Basit Kesirlere Ayırma:

$$\frac{1}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}$$

$$\Rightarrow \ln|N| - \ln|K-N| = rt + c_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{N}{K-N}\right| = rt + c_1 \qquad >0$$

$$\Rightarrow \frac{N}{K-N} = e^{rt}\cdot e^{c_1} = c\,e^{rt} \qquad (c_2 = e^{c_1})$$

$$\Rightarrow \frac{K-N}{N} = \frac{1}{c_2e^{rt}} \Rightarrow \frac{K}{N} = \frac{1}{c_2e^{rt}} + 1 = \frac{1+c_2e^{rt}}{c_2e^{rt}}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{K} = \frac{c_2e^{rt}}{1+c_2e^{rt}} = \frac{\cancel{c_2e^{rt}}}{\cancel{c_2e^{rt}}\left(1+\frac{1}{c_2}e^{-rt}\right)} = \frac{1}{1+ce^{-rt}} \qquad \left(c = \frac{1}{c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{N(t) = \frac{K}{1+ce^{-rt}}}$$

çözümü bulunur. $N>K$ durumunda benzer adımlar izlenerek yine aynı çözüme ulaşılır.

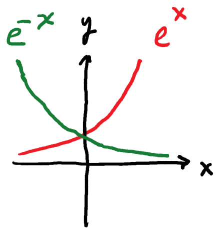
Çözümün Yorumlanması :

$$N(t) = \frac{K}{1+c\,e^{-rt}}$$

① $N_0 = 0$ ise $0 = \dfrac{K}{1+c}$ ve $K=0$ olur.

Dolayısıyla, her $t \geq 0$ için $N(t) = 0$'dır.

② $N_0 > 0$ ve $N_0 < K$ olsun. Bu durumda



$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K}{1+c\,\underbrace{e^{-rt}}_{\to 0}} = K$$

olur. Yani beklendiği üzere nüfus çok uzun süre sonra K'nın çok yakınında olacaktır.

③ $N(0) = N_0$ başlangıç koşulu verilmiş olsun. Şimdi c sabitini belirleyelim:

$$N_0 = \frac{K}{1+c} \Rightarrow \frac{1+c}{K} = \frac{1}{N_0}$$

$$\Rightarrow 1+c = \frac{K}{N_0}$$

$$\Rightarrow c = \frac{K-N_0}{N_0}$$

Dolayısıyla, $\dfrac{dN}{dt} = rN\left(1-\dfrac{N}{K}\right)$, $N(0)=N_0$ başlangıç-değer probleminin çözümü

$$N(t) = \frac{K}{1+\dfrac{K-N_0}{N_0}\,e^{-rt}} = \frac{N_0 K}{N_0 + (K-N_0)\,e^{-rt}}$$

olarak elde edilir.

ÖRN 1 Bir nüfus

$$\frac{dN}{dt} = 1{,}2\, N \left(1 - \frac{N}{4200}\right)$$

lojistik diferansiyel denklemi ile modellensin.

a) Nüfus hangi N değerleri için artar?

b) Nüfus hangi N değerleri için azalır?

c) Denge çözümleri nelerdir?

Çöz. a) $\dfrac{dN}{dt} > 0$ ise nüfus artar.

$$\underbrace{1.2N}_{>0}\left(1 - \frac{N}{4200}\right) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{N}{4200} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{N}{4200} < 1$$

$$\Rightarrow N < 4200$$

Eğer $0 < N < 4200$ ise, nüfus artar.

b) $$\frac{dN}{dt} < 0 \Rightarrow 1.2N\left(1 - \frac{N}{4200}\right) < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{N}{4200} < 0 \Rightarrow N > 4200$$

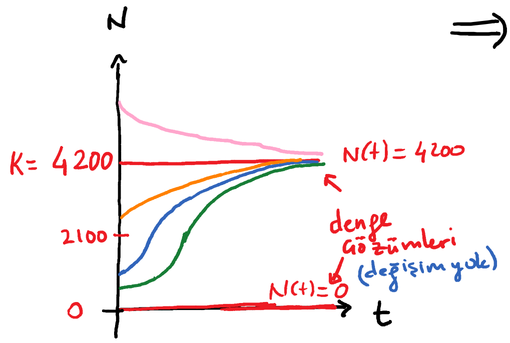
Eğer $N > 4200$ ise, nüfus azalır.

c) $$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow 1.2N\left(1 - \frac{N}{4200}\right) = 0$$

$$\Rightarrow N = 0 \quad \text{ve} \quad N = 4200$$ ← K nüfus taşıma kapasitesi

$N=0$: Kararsız denge çözümü çünkü çözüm eğrileri bu değerden uzaklaşır.

$N=4200$: Kararlı denge çözümü, çünkü çözüm eğrileri bu değere yaklaşır.



Çeşitli başlangıç nüfusları ile verilmiş çözüm eğrileri

ÖRN2. t haftaları göstermek üzere, bir gölde başlangıçta 100 adet olan bir balık türünün nüfus artışı

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}08\, N \left(1 - \frac{N}{1000}\right) \quad \cdots (*)$$

lojistik denklemi ile modellensin.

a) Herhangi bir t anındaki balık nüfusunu bulunuz.

b) 40 ve 80 hafta sonundaki balık nüfusları nelerdir?

c) Denge çözümleri nelerdir?

d) Balık nüfusunun 900'e ulaşması için ne kadar zaman gereklidir?

Çöz a) $(*)$ denklem ayrılabilirdir:

$$\frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{1000}\right)} = 0.08\, dt \Rightarrow \int \frac{1000}{N(1000-N)}\, dN = 0.08 \int dt$$

Basit Kesirlere Ayırma

$$\left(\frac{1000}{N(1000-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{1000-N}\right)$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{1000-N}\right) dN = 0.08t + c_1$$

$$\Rightarrow \ln|N| - \ln|1000-N| = 0.08t + c_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{N}{1000-N}\right| = 0.08t + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{N}{1000-N} = e^{0.08t + c_1} = e^{0.08t} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{= c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1000-N}{N} = \frac{\overbrace{1}^{=c_3}}{c_2\, e^{0.08t}} = c_3\, e^{-0.08t}$$

$$\Rightarrow \frac{1000}{N} = 1 + c_3 e^{-0.08t} \Rightarrow \frac{N}{1000} = \frac{1}{1 + c_3 e^{-0.08t}}$$

$$N(t) = \frac{1000}{1 + c_3 e^{-0.08t}}$$

bulunur. $N(0) = 100$ olduğundan,

başlangıçtaki balık nüfusu

$$100 = \frac{1000}{1 + c_3 e^0} \Rightarrow 1 + c_3 = 10 \Rightarrow c_3 = 9$$

olur. Böylelikle, problemin çözümü

$$\boxed{N(t) = \frac{1000}{1 + 9 e^{-0.08t}}}$$

olarak elde edilir.

b) $$N(t) = \frac{1000}{1+9e^{-0.08t}}$$ olduğuna göre, $t=40$ ve $t=80$ için balık nüfusları yaklaşık olarak şu şekilde bulunur:

$$N(40) = \frac{1000}{1+9e^{-0.08(40)}} \approx 731$$

$$N(80) = \frac{1000}{1+9e^{-0.08(80)}} \simeq 985$$

c) $$\frac{dN}{dt} = 0.08N\left(1-\frac{N}{1000}\right)$$; denge çözümleri nüfus değişiminin olmadığı, yani $\frac{dN}{dt}=0$ olan noktalardır. O halde, $0.08N\left(1-\frac{N}{1000}\right)=0$ dır, yani $N=0$ ve $N=1000$ denge çözümleridir.

Maksimum taşıma kapasitesi

d) Hangi t zamanı için $N(t)=900$ olur?

$$\frac{1000}{1+9e^{-0.08t}} = 900 \Rightarrow \frac{1}{1+9e^{-0.08t}} = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow 1+9e^{-0.08t} = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow 9e^{-0.08t} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow e^{-0.08t} = \frac{1}{81}$$

$$\Rightarrow -0.08t = \ln\left(\frac{1}{81}\right) = \overset{0}{\cancel{\ln 1}} - \ln 81$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 81}{0.08} \simeq 54.9$$

Dolayısıyla, yaklaşık 55 hafta sonra balık nüfusu 900 olur.

ÖRN 3. Biyologlar bir göle 400 tane balık bırakırlar ve taşıma kapasitesini (bırakılan balık cinsinin gölde barınabilecek maksimum sayısı) 10 000 olarak tahmin ederler. İlk yıl balık sayısı üç katına çıkmıştır.

a) Balık nüfusunun lojistik denklemi sağladığını kabul ederek, t yıl sonraki balık nüfusunu veren bir ifade yazınız.

b) Balık nüfusunun 5000'e ulaşması için ne kadar zaman gerekir?

c) $t \to \infty$ iken balık nüfusu nereye yaklaşır?

ÇÖZ. Alıştırma

ÖRN 4. Bir salgın hastalık teorisine göre, hasta nüfusun değişim hızı, hasta birey sayısı ile hasta olmayanların çarpımıyla orantılıdır. 500 kişilik bir köyde 5 kişi hasta olduğuna göre

a) Herhangi bir t anındaki hasta birey sayısını bulunuz.

b) Nüfusun yarısının hasta olması için ne kadar zaman gerekir?

ÇÖZ. Modeli kurmak için ilk olarak sembolleri tanıtalım:

$N(t)$ = t anındaki hasta sayısı ise, hasta olmayan birey sayısı $500-N(t)$'dir.

$N(0)=5$ ← başlangıçtaki hasta sayısı, r = orantı sabiti

hasta sayısı   hasta olmayanların sayısı

$$\frac{dN}{dt} = r\,N\,(500-N) \quad ; \quad N(0)=5$$

modeli elde edilir. Şimdi çözelim:

$$\frac{dN}{N(500-N)} = r\,dt \Rightarrow \int \frac{1}{N(500-N)}\,dN = \int r\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{500}\int\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{500-N}\right)dN = rt + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{500}\left(\ln|N| - \ln|500-N|\right) = rt + c_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{N}{500-N}\right| = 500(rt+c_1)$$

$$\Rightarrow \frac{N}{500-N} = e^{500(rt+c_1)} = e^{500rt}\cdot \underbrace{e^{500c_1}}_{=c_2}$$

$t=0$'da $N=5$ olduğundan $\dfrac{5}{500-5} = c_2 e^0 = c_2 = \dfrac{1}{99}$

olur. Dolayısıyla,

$$\frac{N}{500-N} = \frac{1}{99}e^{500rt} \Rightarrow \frac{500-N}{N} = 99e^{-500rt} \Rightarrow \frac{500}{N} = 1+99e^{-500rt}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{500}{1+99e^{-500rt}}$$

sonucu elde edilir.

b) Hasta sayısının 250 olması için gereken süre :

$$250 = \frac{500}{1 + 99\, e^{-500rt}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 99\, e^{-500rt}}$$

$$1 + 99\, e^{-500rt} = 2$$

$$99\, e^{-500rt} = 1$$

$$e^{-500rt} = \frac{1}{99}$$

$$-500rt = \ln\left(\frac{1}{99}\right) = \ln 1 - \ln 99$$

$$rt = \frac{\ln 99}{500} = 0.00919$$

elde edilir. Başka bir bilgi olmadan r orantı sabiti veya t hakkında bişey diyemeyiz. Ek bir bilgi daha verilmiş olsaydı ilk olarak r sabitini bulur, daha sonra gereken t süresini elde ederiz.

ÖRN5. Salgın bir hastalığın yayılması için kullanılan bir modele göre, yayılma hızı, hasta olan ve olmayan insanların sayısının her ikisiyle de doğru orantılıdır. 5000 nüfuslu her yerden uzak bir kasabada, hafta başında 160 kişi hastayken, hasta sayısı bir haftanın sonunda 1200 olmuştur. Nüfusun %80'inin hastalanması ne kadar zaman alır?

Çöz. Alıştırma.