ÇÖZÜMÜN VARLIK ve TEKLİĞİ

Soru. Hangi koşullar altında

$$(*) \quad \cdots \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , y(x_0) = y_0$$

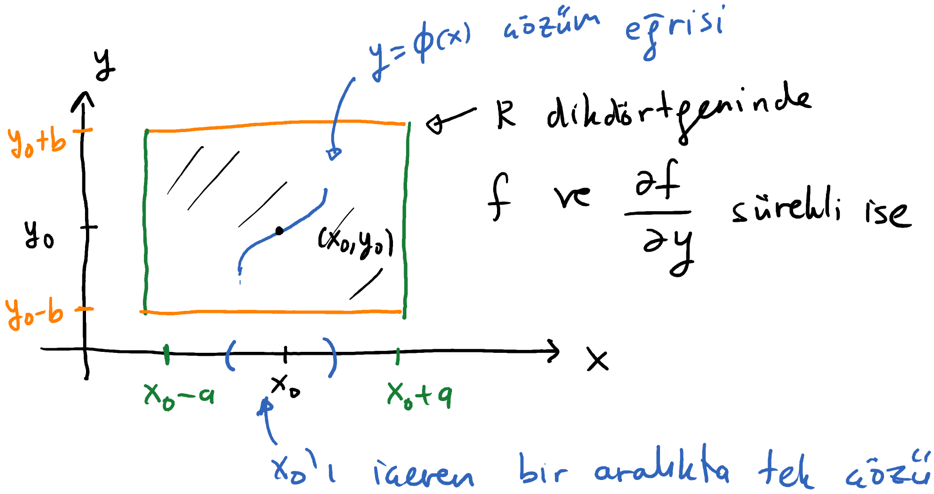
birinci mertebeden başlangıç-değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini garanti ederiz?

Cevap:

Teorem. Eğer f ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları bir

$$R = \{ (x,y) : |x - x_0| \leq a \, , \, |y - y_0| \leq b \}$$

dikdörtgeninde sürekli iseler $(*)$ ile verilen problemin x_0 noktasını içeren bir aralıkta tanımlı tek bir çözümü vardır.



Not. Hipotezlerin sağlanması durumunda Teorem bize 2 şey söyler:

1) Çözümün varlığı kesindir. (f sürekli ise)

2) Çözüm tektir. ($\frac{\partial f}{\partial y}$ sürekli ise)

Not. Teoremin şartları sağlanmıyorsa çözüm olmayabilir, sonsuz çözüm olabilir veya tek çözüm olabilir. Yani, Teorem bize herhangi bir bilgi vermez.

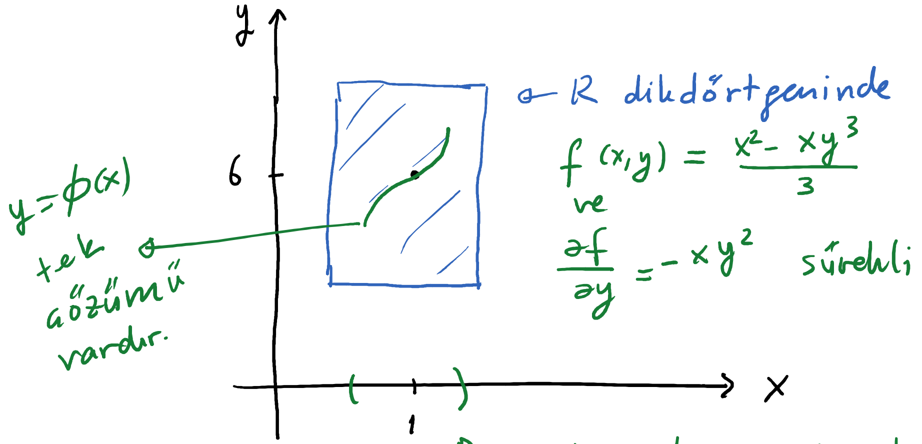
ÖRN 1. $\begin{cases} 3\dfrac{dy}{dx} = x^2 - xy^3 \\ y(1) = 6 \end{cases}$ probleminin çözümünün varlık ve tekliğini inceleyiniz

Çöz. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy^3}{3}$ olur. Yani, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - xy^3}{3}$ dir.

i) f fonk. bir polinomdur. Dolayısıyla $\mathbb{R}^2$'de süreklidir. O halde $(1,6)$ başlangıç koşulunu içeren bir R dikdörtgeninde süreklidir. Bu, problemin en az bir çözümü olduğunu garantiler.

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-3xy^2}{3} = -xy^2$ fonksiyonu da polinom olduğundan tüm $\mathbb{R}^2$ de ve dolayısıyla $(1,6)$ noktasını içeren bir R dikdörtgeninde süreklidir. O halde verilen problem tek çözüme sahiptir.

Sonuç olarak, verilen problemin $x=1$ noktasını içeren bir aralıkta tanımlı, tek çözümü vardır.



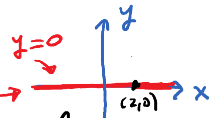
R aralığı tam olarak bilmiyorum ama 1 noktasını içeren $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ gibi bir aralıkta tanımlı tek bir $y=\phi(x)$ çözümünün olduğunu biliyorum.

Alş. Çözümü elde ediniz.

ÖRN 2. $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(2) = 0 \end{cases}$ probleminin çözümünün varlık ve tekliğini inceleyiniz

Çöz. $f(x,y) = 3y^{2/3}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-1/3} = \dfrac{2}{y^{1/3}}$ olur.

i) f fonksiyonu, $(2,0)$ noktasını içeren bir R bölgesinde sürekli olduğundan, problemin $x=2$ noktasını içeren bir aralıkta tanımlı en az bir çözümü vardır.



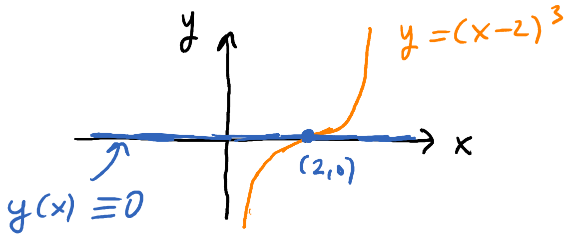
ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{y^{1/3}}$ fonksiyonu $y=0$ doğrusu boyunca tanımlı değil ve dolayısıyla sürekli de olamaz. Yani, $(2,0)$ noktasını içeren bir R bölgesinde $\dfrac{\partial f}{\partial y}$'nin sürekli olması mümkün değildir. O halde, Teorem problemin çözümünün tekliğini garanti etmez.

Çözümün olduğunu biliyoruz ancak çözüm tek midir?

- $y(x) \equiv 0$ fonk. hem $y' = 3y^{2/3}$ denklemini, hem de $y(2) = 0$ koşulunu sağlar. Dolayısıyla, $y \equiv 0$ fonk problemin bir çözümüdür.
- Diğer yandan, $\dfrac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$ denklemi ayrılabilirdir ve çözüm şu şekilde elde edilir:

$$\frac{1}{3} y^{-2/3} dy = dx \Rightarrow \int \frac{1}{3} y^{-2/3} dy = \int dx \Rightarrow y^{1/3} = x + c \Rightarrow y = (x+c)^3$$

$y(2)=0$ koşulundan, $0 = (2+c)^3$ ve $c = -2$ bulunur. Dolayısıyla problemin diğer çözümü $y = (x-2)^3$ şeklindedir.



(2,0) noktasından geçen iki farklı çözüm eğrisinin grafiği

Dolayısıyla, verilen problemin birden fazla çözümü vardır. Ancak, uygun bir başlangıç koşulu koyduğumuzda, örneğin $y(2)=1$ gibi, problem tek çözüme sahip olacaktır.

ÖRN 3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y-2}{x}\right)^{1/2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ probleminin çözümünün varlık ve tekliğini inceleyiniz

Çöz. $f(x,y) = \left(\dfrac{y-2}{x}\right)^{1/2}$ ise $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \dfrac{1}{2(y-2)^{1/2}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x(y-2)}}$ olur.

f, $(1,1)$ noktasını içeren bir bölgede sürekli midir?

Hayır. $f(1,1) = \left(\dfrac{1-2}{1}\right)^{1/2} = \sqrt{-1}$ reel sayı değildir.

f, $(1,1)$'de tanımsız ve dolayısıyla süreksizdir.

O halde çözümün varlığı hakkında bilgi sahibi değiliz.

Çözüm varmış gibi bulmaya çalışalım:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-2)^{1/2}}{x^{1/2}} \Rightarrow (y-2)^{-1/2} dy = x^{-1/2} dx$$

$$\Rightarrow \int (y-2)^{-1/2} dy = \int x^{-1/2} dx$$

$$\Rightarrow 2(y-2)^{1/2} = 2x^{1/2} + c_1$$

$$\Rightarrow (y-2)^{1/2} = x^{1/2} + c_2 \quad \left(\frac{c_1}{2} = c_2\right)$$

$$\Rightarrow y = 2 + (\sqrt{x} + c_2)^2$$

genel çözümü bulunur. Bu, verilen denklemi sağlar. Ancak, verilen $y(1)=1$ koşulunu sağlaması mümkün değildir.

Çünkü
$$1 = 2 + (\sqrt{1} + c_2)^2$$
$$-1 = (1 + c_2)^2$$

denklemini sağlayan bir $c_2 \in \mathbb{R}$ sabiti yoktur. Bu ise verilen problemin bir çözümünün olmadığını gösterir.

Tabi ki de verilen başlangıç koşulu değiştirilerek tek çözüme sahip bir BDP yazılabilir.

Alıştırma. Aşağıda verilen problemlerin varlık ve tekliğini inceleyiniz

1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x \sin y \\ y(1) = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' = (y-x)^{2/3} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y' = \dfrac{(y-2)^{1/2}}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^3 + x y^3 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

6) $x \geq 0$ için

$\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$