

İnsan ve Toplum Bilimleri Fakültesi
İstatistik Bölümü
Matematik I
Güz 2019
Alıştırma Soruları 1: Fonksiyonlar

1. Aşağıda verilen fonksiyonların en geniş tanım kümeleri nedir?

(a) $f(x) = e^x + \sqrt{x+2} + \frac{1}{\ln(1-x)}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x^2+1} + 2^{x+\sqrt{x-1}}$

(c) $f(x) = \frac{\log_2(x+1)}{\sqrt{3-|x-1|}}$

(d) $f(x) = 5\sqrt{|x-2|-|6-x|} + \lfloor x^2 \rfloor + \lceil x \rceil^2$

2. Kuvvet, kök, polinom, rasyonel, cebirsel, trigonometrik, üstel, logaritmik ve transandantal (aşkın) fonksiyonlara birer örnek veriniz.

3. f fonksiyonunun tek mi, çift mi ya da ne tek ne de çift mi olduğunu belirleyiniz.

(a) $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

(b) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}x$

(c) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

(d) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f fonksiyonu bire-bir midir?

(b) f fonksiyonu örten midir?

5. $f(x) = x^2 - 4x + 5$ fonksiyonunun $(-\infty, 2]$ aralığında azalan, $[2, \infty)$ aralığında ise artan olduğunu gösteriniz.

6. \mathbb{R} 'de tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 6, & x < 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = x^2 - 1$$

fonksiyonları verilsin. Buna göre $(f + g - f \circ g \circ f)(-1)$ ifadesinin değeri nedir?

7. $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 - 9$ ise $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

8. $H(x) = \sec^3(\sqrt[4]{x})$ fonksiyonunu $f \circ g \circ h$ biçiminde ifade ediniz.

9. $f(x) = \sqrt{1+x}$ ve $g(x) = \sqrt{1-x}$ olsun. $f+g$, $f-g$, fg ve f/g fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

10. $f(x) = x$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$ olsun. f ve g nin grafiklerini ve grafiksel toplama yöntemini kullanarak, $f+g$ fonksiyonunun grafiğini aynı düzlemde çiziniz.

11. $-1 < x < 1$ için $f(x) = 3 + x^2 + \tan(\pi x/2)$ olsun.

(a) $f^{-1}(3)$ nedir?

(b) $f(f^{-1}(5))$ nedir?

12. Aşağıdaki fonksiyonların tersini bulunuz.

(a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(b) $y = \frac{10^x}{10^x + 1}$

13. $(g \circ f)(x) = \frac{x+2}{x+1}$ ve $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ fonksiyonları verilsin.

(a) g^{-1} fonksiyonunu bulunuz.

(b) f fonksiyonunu bulunuz.

14. Dönüşümler kullanarak aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini kabaca çiziniz. Çizdiğiniz grafikten faydalanarak bu fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini, hangi aralıkta artan hangi aralıkta azalan olduğunu belirleyiniz.

(a) $f(x) = 2 - \sqrt{-x}$

(b) $f(x) = 1 - 2\ln(x-3)$

(c) $f(x) = 3 - 2^{-x+1}$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (e) f(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \quad (f) f(x) = \frac{1}{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

15. (a) $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ ve $y = |f(|x|)|$ fonksiyonlarının grafiği ile f 'nin grafiği arasındaki ilişki nedir? Açıklayınız.

(b) $y = |x^2 - 2x|$, $y = |x|^2 - 2|x|$ ve $y = \left||x|^2 - 2|x|\right|$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

16. $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği π birim sağa kaydırılır, dikey olarak 5 katsayısı ile uzatılır, x -eksenine göre yansıtılır ve son olarak 1 birim aşağıya kaydırılır ise elde edilen yeni grafiği bir fonksiyon olarak ifade ediniz.

17. $f(x) = \sqrt{-1-x}$ fonksiyonunun ve tersinin grafiklerini aynı düzlemde çiziniz. Daha sonra f fonksiyonunun tersini bulunuz.

18. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun.

(a) f fonksiyonu bire-bir ve örten midir?

(b) f^{-1} fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

(c) $y = 1 - f(x+2)$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

19. $\log_2 5$ sayısının rasyonel olmadığını ispatlayınız.

20. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

$$(a) 10^{x^2-1} - 2^{x^2-1} = 0 \quad (b) \ln(\ln x) = 1 \quad (c) \ln(2x+1) = 2 - \ln x \quad (d) e^{e^x} = 10$$

21. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

bağıntısını sağlasın. f sabit bir fonksiyon olmadığına göre $f(0)$ nedir?

22. Bir taksi yolun ilk km için 3 TL, sonrasında ise her 0.1 km için 30 kuruş almaktadır. Yol $0 < x < 2$ uzunluğunda ise yolculuk ücreti C 'yi (TL cinsinden), gidilen yol x 'in (km cinsinden) fonksiyonu olarak ifade ediniz ve bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.

23. Bir mobilya fabrikası müdürü günde 100 sandalye üretiminin maliyeti 8800 TL, 300 sandalye üretiminin maliyetinin 19200 TL olduğunu gözlemlemiştir.

(a) Maliyetin, üretilen sandalye sayısı ile doğrusal ilişkide olduğunu varsayarak, maliyet fonksiyonunu bulup, grafiğini çiziniz.

(b) Grafiğin eğimi nedir ve ne ifade eder?

(c) Grafiğin y -keseni nedir ve ne ifade eder?

24. Aşağıdaki iddialar doğru ise ispatlayınız. Yanlış ise ters örnek veriniz.

(a) f ve g çift fonksiyon ise $f+g$ de çifttir.

(b) f ve g tek fonksiyon ise $f+g$ de tektir.

(c) f ve g tek fonksiyon ise fg fonksiyonu çifttir.

(d) g bir çift fonksiyon ise $f \circ g$ bileşke fonksiyonu da çifttir.

(e) g bir tek fonksiyon ise $f \circ g$ bileşke fonksiyonu da tektir.

(f) f bir fonksiyon ise $f(s+t) = f(s) + f(t)$ olur.

(g) $f(s) = f(t)$ ise $s = t$ 'dir.

(h) f ve g birer fonksiyon olmak üzere, $f \circ g = g \circ f$ 'dir.

(i) Her zaman e^x ile bölümleriz.

(j) f bire-bir ise $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ olur.