

**İstanbul Ticaret Üniversitesi**  
**Mühendislik Fakültesi**  
**MAT121-Matematiksel Analiz I**  
**2019 Güz Dönemi**  
**Alıştırma Soruları 2: Limit-Süreklilik**

1. (a) Bir fonksiyonun bir  $a \in \mathbb{R}$  noktasındaki limitinden bahsedebilmek için fonksiyon bu noktada tanımlı olmak zorunda mıdır? Neden?
- (b) Hangi noktalarda bir fonksiyonun limitinden bahsedemeyiz? Neden?
- (a) Aşağıdaki eşitliğin yanlışı nedir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = x - 2$$

- (b) (a) nın ışığında aşağıdaki eşitliğin neden doğru olduğunu açıklayınız.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} x - 2$$

2. Aşağıdaki limitler mevcut ise hesaplayınız, değilse mevcut olmadığını gösteriniz. (L'Hospital kuralını kullanmayınız.)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2-x} - 2^{1-x}}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x - 1} - \sqrt[3]{1 - x}}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{3}{x}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x^2 - x}$

(k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(16x)}{x + 1 - \cos x}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{e^x}$

(n)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$

(o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

(p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

(r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x^4 - x^2)$

(s)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} [x^3 + 2x^2 + x + 3]$

(t)  $\lim_{x \rightarrow 1} [|x|] (1 - 2x + [|x|])$

(u)  $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{|x^2 + 2x - 15|}{x + 5}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$  ise  $a$  ve  $b$  sayıları nedir?

4. Her  $x$  için  $2 - x^2 \leq f(x) \leq 2 \cos x$  ise  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nedir?

5. Her  $x$  için  $|f(x)| \leq g(x)$  olsun.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ise  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  limiti hakkında ne söylersiniz? Peki,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3$  ise  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  limiti hakkında ne söylersiniz?

- (a)  $y = x^2$  ve  $y = x^4$  fonksiyonlarının grafiklerini aynı düzlemde çiziniz. Grafikler nerede kesişir?

- (b)  $f$  fonksiyonu hakkında

$$\begin{cases} x^2 \leq f(x) \leq x^4, & x < -1 \text{ veya } x > 1 \text{ ise,} \\ x^4 \leq f(x) \leq x^2, & -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

bilgisine sahipseniz aşağıdaki limitler hakkında ne söyleyebilirsiniz?

(i)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$       (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       (iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

6. Hangi aralıktaki  $x$  değerleri için  $x^{1/3} < x^3$ , hangileri için  $x^3 > x^{1/3}$  olur? Eğer  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği  $y = x^{1/3}$  ve  $y = x^3$  fonksiyonlarının grafikleri arasında ise hangi  $a$  değerleri için  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  limitinin değerini belirleyebilirsiniz? Bu noktalarda limitler ne olur?

7.  $x > 5$  için  $\frac{4x - 1}{x} < f(x) < \frac{4x^2 + 3x}{x^2}$  ise  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  limitini bulunuz.

8. Eğer varsa, aşağıdaki fonksiyonların düşey ve yatay asimptotlarını belirleyiniz.

(a)  $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$

(b)  $g(x) = \frac{x \arctan x}{x+1}$

(c)  $h(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x}}$

9. Verilen koşulların tümünü sağlayan bir  $f$  fonksiyonu örneğinin grafiğini çiziniz.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$

10.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 3$  ve  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 2$  ise  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$  nedir?

11.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0, \\ 3 - x, & 0 \leq x < 3 \\ (x - 3)^2, & x > 3 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.

(a)  $f$ 'nin grafiğini çiziniz.

(b) Eğer varsa aşağıdaki limitlerin değerini bulunuz.

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$       (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$       (iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$       (v)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$       (iv)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(c)  $f$  nerede süreksizdir? Neden?

12.  $f$  ve  $g$  sürekli fonksiyonlar,  $f(3) = 5$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - g(x)] = 4$  ise  $g(3)$ 'ü bulunuz.

13.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{\cos x}{x^3 + 1}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $f$  ve  $g$  fonksiyonları  $x = 0$  noktasında sürekli midir? Açıklayınız.

14. Aşağıda verilen fonksiyonların her noktada sürekli olması için gerekli olan  $m$  ve  $n$  değerlerini belirleyiniz.

(a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ m, & x = 2 \end{cases}$       (b)  $g(x) = \begin{cases} mx - n, & x < 1, \\ 5, & x = 1, \\ 2mx + n, & x > 1 \end{cases}$       (c)  $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2 - x}, & x \neq 0, \\ m, & x = 0 \end{cases}$

(d)  $s(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}, & x \neq 0, \\ m, & x = 0 \end{cases}$

15. Sürekliliğin tanımını ve limitin özelliklerini kullanarak,  $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$  fonksiyonunun  $[-4, 4]$  aralığında sürekli olduğunu gösteriniz.

16. Verilen fonksiyonların sürekli olduğu noktalar kümesini belirleyiniz.

(a)  $f(x) = \frac{\ln x + \arctan x}{x^2 - 1}$       (b)  $g(x) = \ln(\tan^2 x)$       (c)  $h(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

17.  $f(x) = \frac{x - 2}{|x| - 2}$  fonksiyonunu  $x = 2$  ve  $x = -2$  noktalarında tanımlayarak sürekli yapmak mümkün müdür?

18. Aşağıda verilen denklemlerin verilen aralık içinde bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

(a)  $\ln x = e^{-x}$ ,  $(1, 2)$       (b)  $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

19.  $f(x) = x^6 + 2x - 7$  ise  $f(c) = 25$  koşulunu sağlayan bir  $c$  sayısının var olduğunu gösteriniz.

20. Üçüncü kuvvetinden bir fazla olan sayı var mıdır?

21. Ara Değer Teoremi'ni kullanarak  $c^2 = 2$  koşulunu sağlayan bir pozitif  $c$  sayısının varlığını gösteriniz. (Bu,  $\sqrt{2}$  sayısının varlığını kanıtlar.)

22.  $M$  Dünya'nın kütlesi,  $R$  yarıçapı ve  $G$  yerçekimi olmak üzere, Dünya'nın merkezinden  $r$  uzaklığındaki birim kütleli bir nesneye uyguladığı çekim kuvveti

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3}, & r < R, \\ \frac{GM}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

ile ifade ediliyor.  $F$ ,  $r$ 'nin fonksiyonu olarak sürekli midir?

23.  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + x \sin\left(\frac{121}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  nedir?
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  nedir?
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$  nedir?

24. Doğru/Yanlış

- (a) Eğer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$  ve  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ise  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  mevcut değildir.
- (b) Eğer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  ve  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ise  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  mevcut değildir.
- (c) Eğer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  mevcut ve  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  mevcut değil ise  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$  mevcut değildir.
- (d) Eğer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  ve  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  ise  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$ .
- (e) Eğer bir  $f$  fonksiyonu 5 sayısında süreksiz ise  $f(5)$  tanımlı değildir.
- (f)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$  varsa, limit değeri  $f(1)g(1)$  olmalıdır.
- (g)  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$  ise  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ 'dır.
- (h) Bir fonksiyonun en fazla iki yatay asimptotu olabilir.
- (i)  $x = 2$  doğrusu  $y = f(x)$  in düşey asimptotu ise  $f$  fonksiyonu 2 de tanımlı değildir.
- (j)  $f(2) > 0$  ve  $f(4) < 0$  ise 2 ve 4 arasında  $f(c) = 0$  koşulunu sağlayan en az bir  $c$  sayısı vardır.
- (k) Bir fonksiyon sonsuz tane düşey asimptota sahip olabilir.
- (l) Her  $x$  için  $f(x) > 5$  ve  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  mevcut ise  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 5$  olmalıdır.
- (m)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ve  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  mevcut ise  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  mevcuttur.
- (n)  $y = 2$  doğrusu  $y = f(x)$  in yatay asimptotu ise  $f$  fonksiyonunun grafiğini kesemez.
- (o) Bir fonksiyonun tanım kümesi  $[0, \infty)$  ve yatay asimptotu yoksa,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  ya da  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  olur.