

İnsan ve Toplum Bilimleri Fakültesi
İstatistik Bölümü
Matematik I
Güz 2019
Alıştırma Soruları 2: Limit-Süreklilik

1. (a) Bir fonksiyonun bir $a \in \mathbb{R}$ noktasındaki limitinden bahsedebilmek için fonksiyon bu noktada tanımlı olmak zorunda mıdır? Neden?
 (b) Hangi noktalarda bir fonksiyonun limitinden bahsedemeyiz? Neden?

2. (a) Aşağıdaki eşitliğin yanlışı nedir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = x - 2$$

- (b) (a) nın ışığında aşağıdaki eşitliğin neden doğru olduğunu açıklayınız.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} x - 2$$

3. Aşağıdaki limitler mevcut ise hesaplayınız, değilse mevcut olmadığını gösteriniz. (L'Hospital kuralını kullanmayınız.)

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{1-x}}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{3}{x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x^2 - x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(16x)}{x + 1 - \cos x}$

(m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{e^x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$

(o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

(p) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

(r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x^4 - x^2)$

(s) $\lim_{x \rightarrow -2^+} [|x^3 + 2x^2 + x + 3|]$

(t) $\lim_{x \rightarrow 1} [|x|] (1 - 2x + [|x|])$

(u) $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{|x^2 + 2x - 15|}{x + 5}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$ ise a ve b sayıları nedir?

5. Her x için $2 - x^2 \leq f(x) \leq 2 \cos x$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nedir?

6. Her x için $|f(x)| \leq g(x)$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limiti hakkında ne söylersiniz? Peki, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limiti hakkında ne söylersiniz?

7. (a) $y = x^2$ ve $y = x^4$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı düzlemde çiziniz. Grafikler nerede kesişir?

(b) f fonksiyonu hakkında

$$\begin{cases} x^2 \leq f(x) \leq x^4, & x < -1 \text{ veya } x > 1 \text{ ise,} \\ x^4 \leq f(x) \leq x^2, & -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

bilgisine sahipseniz aşağıdaki limitler hakkında ne söyleyebilirsiniz?

(i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

8. Hangi aralıktaki x değerleri için $x^{1/3} < x^3$, hangileri için $x^3 > x^{1/3}$ olur? Eğer $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $y = x^{1/3}$ ve $y = x^3$ fonksiyonlarının grafikleri arasında ise hangi a değerleri için $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limitinin değerini belirleyebilirsiniz? Bu noktalarda limitler ne olur?

9. $x > 5$ için $\frac{4x-1}{x} < f(x) < \frac{4x^2+3x}{x^2}$ ise $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ limitini bulunuz.

10. Eğer varsa, aşağıdaki fonksiyonların düşey ve yatay asimptotlarını belirleyiniz.

(a) $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$

(b) $g(x) = \frac{x \arctan x}{x+1}$

(c) $h(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x}}$

11. Verilen koşulların tümünü sağlayan bir f fonksiyonu örneğinin grafiğini çiziniz.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
(b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

12. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 3$ ve $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 2$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ nedir?

13.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0, \\ 3 - x, & 0 \leq x < 3 \\ (x - 3)^2, & x > 3 \end{cases}$$

fonsiyonu verilsin.

(a) f 'nin grafiğini çiziniz.

(b) Eğer varsa aşağıdaki limitlerin değerini bulunuz.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ (v) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (vi) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(c) f nerede süreksizdir? Neden?

14. f ve g sürekli fonksiyonlar, $f(3) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - g(x)] = 4$ ise $g(3)$ 'ü bulunuz.

15.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{\cos x}{x^3 + 1}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları $x = 0$ noktasında sürekli midir? Açıklayınız.

16. Aşağıda verilen fonksiyonların her noktada sürekli olması için gerekli olan m ve n değerlerini belirleyiniz.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ m, & x = 2 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} mx - n, & x < 1, \\ 5, & x = 1, \\ 2mx + n, & x > 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2 - x}, & x \neq 0, \\ m, & x = 0 \end{cases}$

(d) $s(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}, & x \neq 0, \\ m, & x = 0 \end{cases}$

17. Sürekliliğin tanımını ve limitin özelliklerini kullanarak, $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ fonksiyonunun $[-4, 4]$ aralığında sürekli olduğunu gösteriniz.

18. Verilen fonksiyonların sürekli olduğu noktalar kümesini belirleyiniz.

(a) $f(x) = \frac{\ln x + \arctan x}{x^2 - 1}$ (b) $g(x) = \ln(\tan^2 x)$ (c) $h(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

19. $f(x) = \frac{x - 2}{|x| - 2}$ fonksiyonunu $x = 2$ ve $x = -2$ noktalarında tanımlayarak sürekli yapmak mümkün müdür?

20. M Dünya'nın kütlesi, R yarıçapı ve G yerçekimi olmak üzere, Dünya'nın merkezinden r uzaklığındaki birim kütleli bir nesneye uyguladığı çekim kuvveti

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3}, & r < R, \\ \frac{GM}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

ile ifade ediliyor. F , r 'nin fonksiyonu olarak sürekli midir?

21. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + x \sin\left(\frac{121}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nedir? (b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ nedir? (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$ nedir?

22. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -2, & x = 1, \\ 2 + x, & x \neq 0, 1, \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x, & x \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

- (a) $(f \circ g)(x)$ nedir? (b) $(f \circ g)(0)$ nedir? (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ nedir? (d) $f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x))$ nedir?
(e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x))$ eşitliğinin gerçekleşmemesinin nedeni nedir?

23. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1, \\ 2, & x \neq 0, 1, \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + |x|, & x \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

- (a) $(f \circ g)(x)$ nedir? (b) $(f \circ g)(0)$ nedir? (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ nedir? (d) $f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x))$ nedir?
(e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x))$ eşitliğinin gerçekleşmemesinin nedeni nedir?

24. Aşağıda verilen denklemlerin verilen aralık içinde bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

- (a) $\ln x = e^{-x}$, $(1, 2)$ (b) $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

25. $f(x) = x^6 + 2x - 7$ ise $f(c) = 25$ koşulunu sağlayan bir c sayısının var olduğunu gösteriniz.

26. Üçüncü kuvvetinden bir fazla olan sayı var mıdır?

27. Ara Değer Teoremi'ni kullanarak $c^2 = 2$ koşulunu sağlayan bir pozitif c sayısının varlığını gösteriniz. (Bu, $\sqrt{2}$ sayısının varlığını kanıtlar.)

28. Doğru/Yanlış

- (a) Eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ise $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mevcut değildir.
(b) Eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ise $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mevcut değildir.
(c) Eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mevcut ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ mevcut değil ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ mevcut değildir.
(d) Eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ise $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$.
(e) Eğer bir f fonksiyonu 5 sayısında süreksiz ise $f(5)$ tanımlı değildir.
(f) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ varsa, limit değeri $f(1)g(1)$ olmalıdır.
(g) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ ise $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ 'dır.
(h) Bir fonksiyonun en fazla iki yatay asimptotu olabilir.
(i) $x = 2$ doğrusu $y = f(x)$ in düşey asimptotu ise f fonksiyonu 2 de tanımlı değildir.
(j) $f(2) > 0$ ve $f(4) < 0$ ise 2 ve 4 arasında $f(c) = 0$ koşulunu sağlayan en az bir c sayısı vardır.
(k) Bir fonksiyon sonsuz tane düşey asimptota sahip olabilir.
(l) Her x için $f(x) > 5$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ mevcut ise $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 5$ olmalıdır.
(m) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ mevcut ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mevcuttur.
(n) $y = 2$ doğrusu $y = f(x)$ in yatay asimptotu ise f fonksiyonunun grafiğini kesemez.
(o) Bir fonksiyonun tanım kümesi $[0, \infty)$ ve yatay asimptotu yoksa, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ya da $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ olur.