

Matematiksel Analiz I

Güz 2019

Alıştırma Soruları 4

Türevin Uygulamaları:

Bağımlı Hızlar, L'Hospital Kuralı, Grafik Çizme, Optimizasyon Problemleri

1. Konik bir tanka $9 \text{ m}^3/\text{dk}$ hızla su akmaktadır. Tankın ucu yere doğru bakmaktadır ve yüksekliği 10 m ve taban yarıçapı 5 m'dir. Su derinliği 6 m olduğunda, su seviyesi ne hızla artmaktadır?
2. Küresel bir balon $100\pi \text{ m}^3/\text{dk}$ hızla helyumla doldurulmaktadır. Yarıçap 5 m olduğunda, balonun yarıçapı ne hızla artmaktadır? Yüzey alanı ne hızla artmaktadır?
3. 13 m uzunluğunda bir merdiven, tabanı kaymaya başladığında bir eve dayanmaktadır. Taban evden 12 m uzaklığa geldiğinde, taban 5 m/dk hızla kaymaktadır. O anda merdivenin üst tarafı ne hızla kaymaktadır?
4. Bir balon düz bir yolun üzerinde dik olarak 1 m/sn sabit hızla yükselmektedir. Balon yerden tam 65 m yüksekteyken, altından 17 m/sn sabit hızla bir bisiklet geçmektedir. Bisikletle balon arasındaki mesafesi 3 sn sonra ne hızla artar?
5. Aşağıdaki limitleri bulunuz (L'Hospital kuralını kullanabilirsiniz).

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x+1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\tan 3x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{2x}$ (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x}$

6. Bir çiftçi bir tarafı kayalık olan 128.000 m^2 büyüklüğünde dikdörtgensel bir ağıl yapmak istiyor. Çit kurma işleminin maliyeti kayalık boyunca 15 TL/m, diğer üç taraf için 25 TL/m'dir. Minimum maliyetle elde edilen ağılın boyutlarını bulunuz.
7. Üstü açık bir kutu $12 \times 12 \text{ m}^2$ 'lik bir teneke levhanın köşelerinden eş büyüklükte küçük kareler kesilip, kenarları kıvrılarak yapılacaktır. Kutunun mümkün olduğunca fazla şey alabilmesi için köşelerden kesilen kareler ne büyüklükte olmalıdır?
8. 2 yarıçaplı bir yarı çemberin içine bir dikdörtgen yerleştirilecektir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir ve boyutları nedir?
9. Dikdörtgen bir tarla parçası bir kenarından bir nehir ve diğer üç kenarından elektrikli çitle çevrelenecektir. Elinizde 800 m tel bulunuyorsa, en fazla ne kadar bir alanı çevreleyebilirsiniz? Boyutları nedir?
10. 1000 cm^3 'lük bir hacim içerebilecek en hafif (en az malzemeyle yapılmış), üstü açık, dik bir silindir kutunun boyutları nedir?
11. Posta servisi ancak, uzunluğu ve çevre mesafesinin toplamı 108 m'yi aşmayan kutuları yurtiçi taşıma için kabul etmektedir. Hangi boyutlar, uçları birer kare olan kutuya olası en büyük hacmi verir?
12. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun;
 - (a) Tanım kümesini ve eğer varsa eksenleri kestiği noktaları bulunuz.
 - (b) Eğer varsa asimptotlarını bulunuz.
 - (c) Artan ve azalan olduğu aralıkları, varsa kritik noktalarını ve yerel ekstremum noktalarını bulunuz.
 - (d) İç büküm ve dış büküm olduğu aralıkları ve eğer varsa büküm noktalarını bulunuz.
 - (e) Grafiğini çizin.
13. $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+3}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun;

- (a) Tanım kümesini ve eğer varsa eksenleri kestiği noktaları bulunuz.
- (b) Eğer varsa asimptotlarını bulunuz.
- (c) Artan ve azalan olduğu aralıkları, varsa kritik noktalarını ve yerel ekstremum noktalarını bulunuz.
- (d) İç bükey ve dış bükey olduğu aralıkları ve eğer varsa büküm noktalarını bulunuz.
- (e) Grafiğini çiziniz.
14. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun;
- (a) Tanım kümesini ve eğer varsa eksenleri kestiği noktaları bulunuz.
- (b) Eğer varsa asimptotlarını bulunuz.
- (c) Artan ve azalan olduğu aralıkları, varsa kritik noktalarını ve yerel ekstremum noktalarını bulunuz.
- (d) İç bükey ve dış bükey olduğu aralıkları ve eğer varsa büküm noktalarını bulunuz.
- (e) Grafiğini çiziniz.
15. $f(x) = \frac{x^3}{x^3-1}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun;
- (a) Tanım kümesini ve eğer varsa eksenleri kestiği noktaları bulunuz.
- (b) Eğer varsa asimptotlarını bulunuz.
- (c) Artan ve azalan olduğu aralıkları, varsa kritik noktalarını ve yerel ekstremum noktalarını bulunuz.
- (d) İç bükey ve dış bükey olduğu aralıkları ve eğer varsa büküm noktalarını bulunuz.
- (e) Grafiğini çiziniz.
16. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun;
- (a) Tanım kümesini ve eğer varsa eksenleri kestiği noktaları bulunuz.
- (b) Eğer varsa asimptotlarını bulunuz.
- (c) Artan ve azalan olduğu aralıkları, varsa kritik noktalarını ve yerel ekstremum noktalarını bulunuz.
- (d) İç bükey ve dış bükey olduğu aralıkları ve eğer varsa büküm noktalarını bulunuz.
- (e) Grafiğini çiziniz.
17. Doğru/Yanlış
- (a) f bir aralıkta artan ise bu aralıkta $f'(x) > 0$ 'dır.
- (b) Bir aralıkta $f'(x) > 0$ ise, bu aralıkta f artandır.
- (c) $f'(c) = 0$ iken f fonksiyonunun c 'de bir ekstremumu vardır.
- (d) Eğer f , c noktasında yerel ekstremuma sahip ise ve $f'(c)$ varsa $f'(c) = 0$ 'dır.
- (e) $f''(c) = 0$ ise $(c, f(c))$ büküm noktasıdır.
- (f) (a, b) aralığındaki her bir x için $f''(x) < 0$ ise f 'nin grafiği bu aralıkta iç bükeydir.
- (g) Eğer $f(c)$ bir yerel maksimum ise $f'(c) = 0$ 'dır.
- (h) 1^∞ formundaki limit her zaman 1'dir.
- (i) $\frac{\infty}{\infty}$ şeklindeki her bir limit belirsizdir.
- (j) $\infty - \infty$ formundaki bir limit her zaman 0'dır.
- (k) Her mutlak ekstremum noktası yerel ekstremumdur.