HAS OLMAYAN İNTEGRAL (GENELLEŞMİŞ İNT.)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Belirli (Riemann) integralinde

i) $[a,b]$ sınırlı aralık

ii) f sınırlı

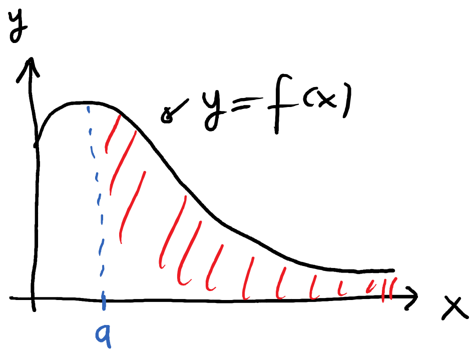
idi.

Belirli integral kavramını

i) $[a,b]$ aralığının sınırsız olması

ii) f fonk. sınırsız olması

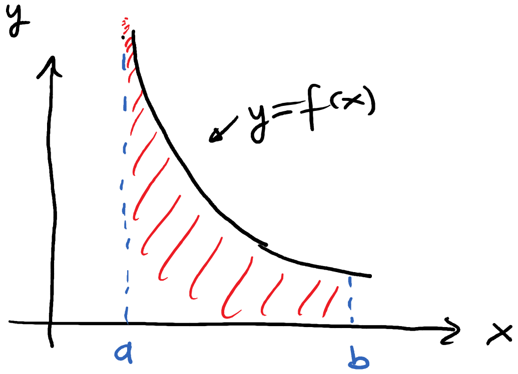
durumlarına genişleteceğiz. Her iki durumda da integrale has olmayan integral denir.



I. Tip

sınırsız aralık

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = ?$$



II. Tip

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

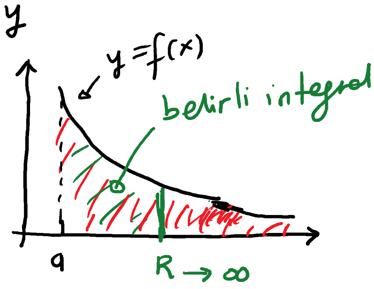
sınırsız fonk.

Not: f pozitifse, has olmayan integrallerin her biri alan olarak yorumlanabilir. Yani, soru taralı alanların (sınırsız bölgeler) sonlu ve sonsuzluğuyla ilgili olur!

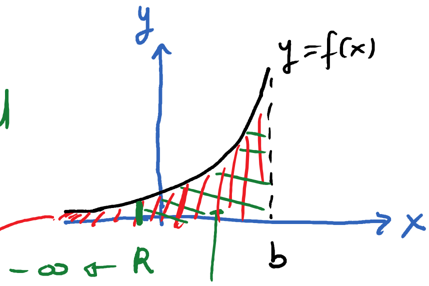
I. Tip Has Olmayan İntegraller : $[a,b]$ sınırsız bir aralık

f fonksiyonu sınırlı bir fonk olsun.

- $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$ belirli integral



- $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx$$ belirli integral

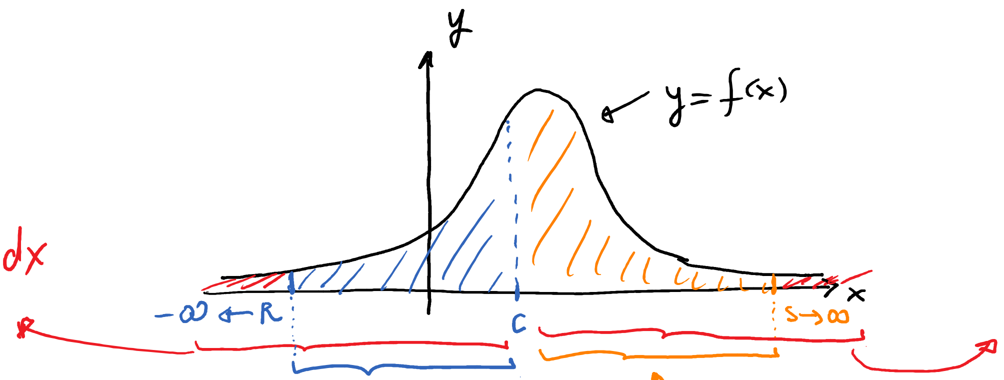


kırmızı alan has olmayan integral ile temsil edilen alan

yeşil alan belirli integralin temsil ettiği alan

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^c f(x)\,dx + \lim_{S\to\infty} \int_c^S f(x)\,dx$$ (c keyfi sabit)

$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$



$\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$

$\int_R^c f(x)\,dx$ integralinin temsil ettiği alan

$\int_c^S f(x)\,dx$ integralinin temsil ettiği alan

Yukarıdaki limitler varsa verilen integraller yakınsak, aksi halde ıraksaktır.

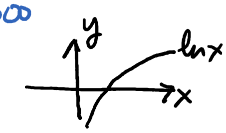
ÖRN Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

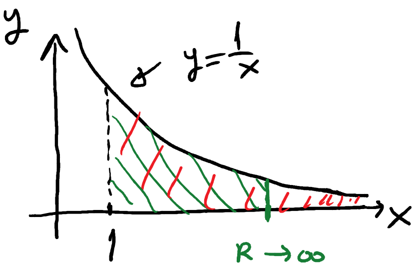
Çöz.

a) $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \ln|x| \Big|_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\ln R - \cancel{\ln 1}^{\,0}) = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty$$



$\therefore$ Integral ıraksaktır.



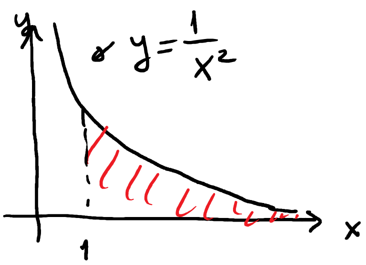
Yeşil ile taralı sınırlı bölgenin alanı ile limit yardımıyla kırmızı ile taralı sınırsız bölgenin alanına yaklaşıyoruz. Ve bu soru için bu alan sonsuz çıktı.

belirli integral

b) $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-1}{R}^{\nearrow 0}+\frac{1}{1}\right)$$

$$= 1 \,//$$

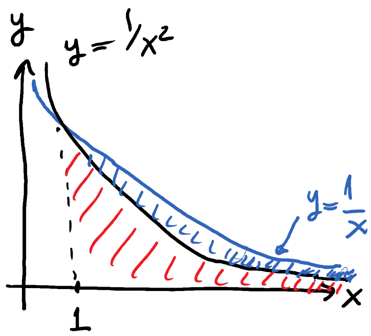
$\therefore \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ integrali 1'e yakınsar.



Taralı alan sonlu mu?

Evet. Sınırsız olan bu bölgenin alanı 1'dir.

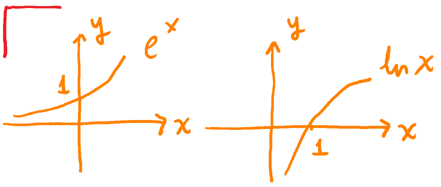
Gözlem:



$y=\frac{1}{x^2}$ fonksiyonu altında kalan alan sonlu, $y=\frac{1}{x}$ fonksiyonu altında kalan ise sonsuz çıktı. Demek ki $y=\frac{1}{x^2}$ fonk. daha hızlı azalan bir fonksiyondur.

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \lim_{R\to-\infty} \underbrace{\int_{R}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx}_{\text{belirli integral}} = \lim_{R\to-\infty} \ln(e^x+1)\Big|_R^0$$



$$= \lim_{R\to-\infty} \left[\ln 2 - \ln(e^R+1)\right]$$

$$= \ln 2 - \lim_{R\to-\infty} \ln(\underbrace{e^R}_{\to 0}+1)$$

$$\lim_{R\to-\infty} \ln(e^R+1) = \ln\Big(\lim_{R\to-\infty} e^R + 1\Big) = \ln(1) = 0$$

$$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$I_2 = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \ln(e^x+1)\Big|_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\ln(\underbrace{e^R}_{\to\infty}+1) - \ln(e^0+1)\right]$$

($R\to\infty$ iken $e^R\to\infty$ ve $e^R+1\to\infty$ olur. Dolayısıyla $\ln(e^R+1)\to\infty$ dur.)

$$= \infty - \ln 2$$

$$= \infty$$

$\therefore \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ integrali ıraksaktır. Bu integralin yakınsak olabilmesi için hem I_1 hem de I_2 integrallerinin yakınsak olması gerekir.

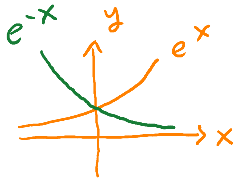
Uyarı. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx \neq \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

ÖRN Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\int_{-1}^{\infty} e^{-x}dx$ b) $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^3}dx$ c) $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$ d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

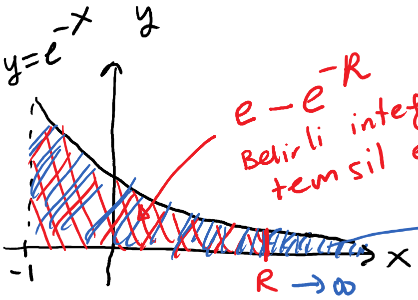
Çöz. a) $\int_{-1}^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-1}^{R} e^{-x}dx = \lim\limits_{R\to\infty} \left(-e^{-x} \Big|_{-1}^{R} \right)$

= Belirli integral



$= \lim\limits_{R\to\infty} \left(-\cancel{e^{-R}} + e^{1} \right) = e$

$\therefore$ İntegral yakınsaktır.



$e - e^{-R}$ Belirli integralin temsil ettiği alan

sınırsız bölge has olmayan integralin temsil ettiği alandır ve e'ye eşit çıktı.

b) $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^3}dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{2}^{R} (x-1)^{-3}dx = \lim\limits_{R\to\infty} \frac{(x-1)^{-2}}{-2} \Big|_{2}^{R}$

← Belirli integral

$= \lim\limits_{R\to\infty} -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^2} \right]_{2}^{R} = \lim\limits_{R\to\infty} -\frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{(R-1)^2}} - 1 \right]$

$\therefore$ İntegral $\frac{1}{2}$'ye yakınsar. $= \frac{1}{2}$ //

c) $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = \lim\limits_{R\to-\infty} \int_{R}^{0} xe^{x}dx = \lim\limits_{R\to-\infty} \left[xe^{x} \Big|_{R}^{0} - \underbrace{\int_{R}^{0} e^{x}dx}_{e^x} \right]$

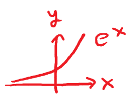
= belirli integral

K.İ: $\left(\begin{matrix} u=x, & dv=e^{x}dx \\ du=dx, & v=e^{x} \end{matrix} \right)$

$\lim\limits_{R\to-\infty} -Re^{R} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{R\to-\infty} \frac{-R}{e^{-R}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{LH}{=}} \lim\limits_{R\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-R}} = 0$

$-e^{-R} \to -\infty$

$= \lim\limits_{R\to-\infty} \left[-\cancel{Re^{R}} - \cancel{e^{0}} + \cancel{e^{R}} \right]$



$= 0 - 1 + 0 = -1$ //

$\therefore$ İntegral yakınsak.

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = I_1 + I_2$

keyfi seçim

belirli integral

$$I_1 = \lim_{R\to-\infty} \boxed{\int_R^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx} = \lim_{R\to-\infty} \arctan(e^x)\Big|_R^0$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \Big[\underbrace{\arctan(e^0)}_{\pi/4} - \arctan(e^R)\Big]$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \Big[\tfrac{\pi}{4} - \arctan(\underbrace{e^R}_{\to 0})\Big]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \underbrace{\arctan 0}_{0}$$

$$= \pi/4$$

[$u = e^x$, $du = e^x dx$

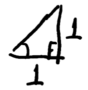
$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \arctan u$$

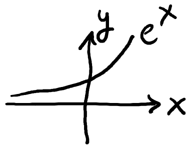
$$= \arctan(e^x)$$]

[$\arctan 1 = x$

$\tan x = 1$



$x = \dfrac{\pi}{4}$



]

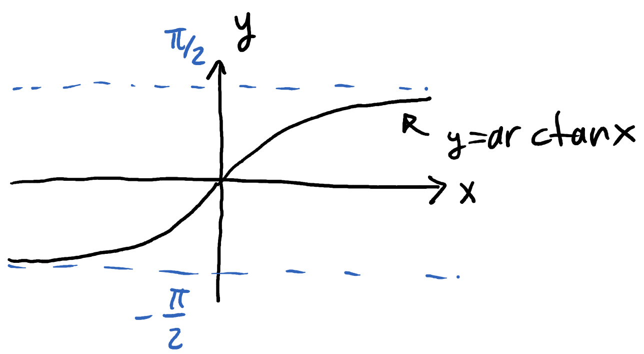
$$I_2 = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \arctan(e^x)\Big|_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \Big[\underbrace{\arctan(e^R)}_{\pi/2} - \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4}\Big]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

[$R\to\infty$ iken $e^R \to \infty$

olur ve $\arctan e^R \to \dfrac{\pi}{2}$]



O halde verilen integral $I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

sayısına yakınsar.

<u>Uyarı 1</u>. İntegrallerden herhangi biri yakınsak değilse

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

yazılamaz. Örneğin, $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ integrali ıraksak olmasına rağmen yukarıdaki uyarı dikkate alınmayarak hesaplanırsa

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\,dx = 0$$

hatalı sonucu bulunur.

<u>Uyarı 2</u> Belirli integraller için

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

eşitliği doğru olmasına rağmen, bu durum has olmayan integrallerde, integrallerden herhangi biri yakınsak değilse, geçerli değildir. Örneğin,

$$\int_1^{\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx \neq \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx - \int_1^{\infty} \frac{1}{x+1}dx .$$

<u>ÖRN</u> (p- integrali) $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \text{ıraksak}, & p \leq 1 \\ \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

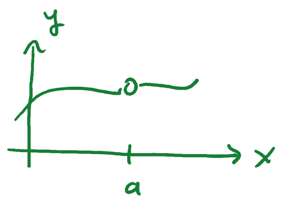
eşitliği söz konusudur. (Gösteriniz)

<u>ÖRN</u>. a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}dx \underset{p=3>1}{=} \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$ //

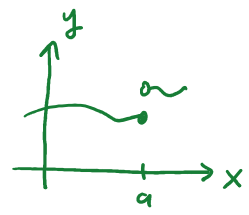
b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx \underset{p=1/3<1}{=}$ ıraksaktır.

II. Tip Has Olmayan İntegraller : f fonksiyonu sınırsız

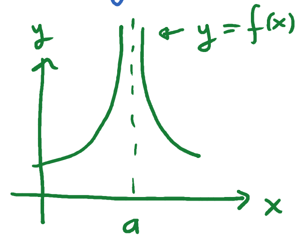
Hatırlatma: (Süreksizlik çeşitleri)



Kaldırılabilir süreksiz



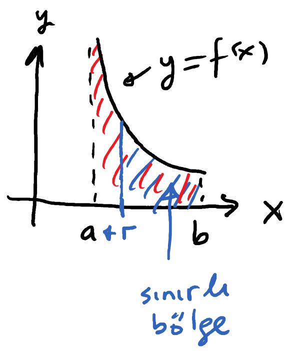
Sıçrama süreksizliği



sonsuz süreksizlik (f sınırsız)

$\int_a^b f(x)\,dx$ integralini; $[a,b]$ sınırlı fakat f fonk. sınırsız olduğu durumda inceleyeceğiz.

• f sadece $x=a$'da sınırsız (sonsuz süreksiz) olsun.

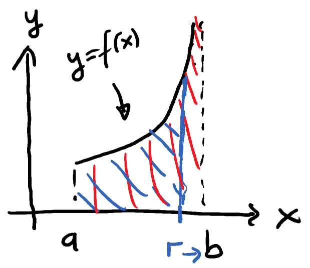


$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to a^+} \int_r^b f(x)\,dx$$

belirli integral
f sınırlı

limiti mevcutsa integral yakınsaktır.

• f sadece $x=b$'de sınırsız olsun.

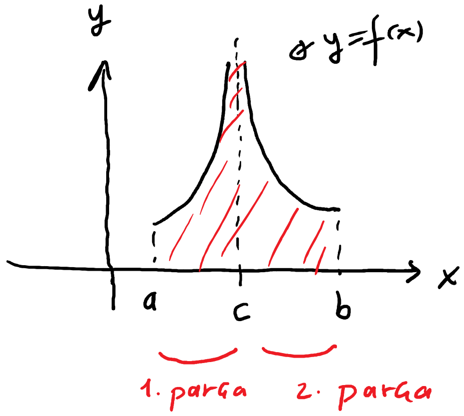


$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\,dx$$

belirli integral
f sınırlı

limiti mevcutsa integral yakınsaktır.

• f sadece (a,b) aralığındaki bir c noktasında sınırsız olsun.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ikisi de yakınsak ise soldaki integral yakınsaktır.

ÖRN. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\int_0^2 \frac{1}{x^3}\,dx$ b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\,dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

ÇÖZ a) $x=0$'da $\frac{1}{x^3}$ fonksiyonu sonsuz süreksizliğe sahip

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{r\to 0^+} \int_r^2 x^{-3}\,dx = \lim_{r\to 0^+} \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)\Big|_r^2$$

$0^+ \quad 2$

$$= \lim_{r\to 0^+} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{r^2}}^{\infty}\right) = \infty$$

$\therefore$ İntegral ıraksaktır.

b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ fonksiyonu $0 \in [-1,2]$ noktasında sonsuz süreksizdir.

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^3}\,dx$$

$\leftarrow$ ıraksak (önceki örnek)

$\therefore$ Verilen integral ıraksaktır

Uyarı. $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\,dx \neq \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{-1}^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 3/8$

c) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ fonksiyonu $x = \frac{\pi}{2}$ de sonsuz süreksizdir.

belirli integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \lim_{r\to \pi/2^-} \int_0^r \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

$u = \cos x$
$du = -\sin x\,dx$

$\int \frac{-du}{\sqrt{u}} = -\int u^{-1/2}\,du = -2u^{1/2}$

$0 \quad r \to \pi/2$

$$= \lim_{r\to \pi/2^-} \left(-2\sqrt{\cos x}\,\Big|_0^r\right)$$

$$= \lim_{r\to \pi/2^-} \left(-2\sqrt{\cos r} + 2\sqrt{\underbrace{\cos 0}_{1}}\right)$$

$$= -2\sqrt{\cos \pi/2} + 2 = 2 \,//$$

$\therefore$ İntegral 2'ye yakınsar.

ÖRN. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$ c) $\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx$

ÇÖZ. a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ fonk. $x=0$'ı sonsuz süreksizliğe sahip.

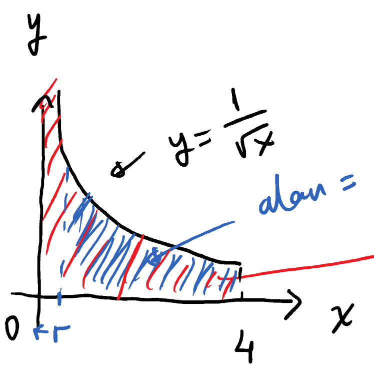
belirli integral

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{r\to 0^+} \int_r^4 x^{-1/2}\,dx = \lim_{r\to 0^+} 2x^{1/2}\Big|_r^4$$

$$= \lim_{r\to 0^+} 2\left(2-\sqrt{r}\right) = 2(2-0)=4$$

0 r 4

∴ İntegral yakınsak.



Has olmayan integralin temsil ettiği sınırsız bölgenin alanı 4 çıktı.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$ fonksiyonu $x=1$ noktasında sonsuz süreksizdir. O halde,

belirli integral

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-1)}\,dx = \lim_{r\to 1^-} \int_0^r \frac{1}{(x-2)(x-1)}\,dx$$

0 r→1

$$= \lim_{r\to 1^-} \int_0^r \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

Basit Kesirlere Ayırma
$$\left(\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \Big[\ln|x-2| - \ln|x-1|\Big]\Big|_0^r$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_0^r$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \left(\ln\left|\frac{r-2}{r-1}\right| - \ln\left|\frac{-2}{-1}\right|\right) = \infty - \ln 2 = \infty$$

$r\to 1^- \Rightarrow \frac{r-2}{r-1} \to \frac{-1}{0^-} \to \infty$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{r-2}{r-1}\right| \to \infty$

∴ İntegral ıraksaktır.

c) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^{1/3}}$ fonksiyonu $x=2 \in (1,5)$ noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir.

$$\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx = \int_1^2 (x-2)^{-1/3}\,dx + \int_2^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \lim_{r\to 2^-} \int_1^r (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{r\to 2^-} \frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big|_1^r$$

$$= \lim_{r\to 2^-} \frac{3}{2}\left[\underbrace{(r-2)^{2/3}}_{0} - \underbrace{(-1)^{2/3}}_{1} \right] = \frac{3}{2}[0-1] = -\frac{3}{2}$$

$$I_2 = \lim_{r\to 2^+} \int_r^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{r\to 2^+} \frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big|_r^5$$

$$= \lim_{r\to 2^+} \frac{3}{2}\left[3^{2/3} - \underbrace{(r-2)^{2/3}}_{0} \right] = \frac{3}{2}\, 3^{2/3}$$

Demek ki, $\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\, 3^{2/3}$ olur.

ÖRN. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çöz. i) İntegrasyon aralığı sınırsız: $[0,\infty)$

ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ fonksiyonu $x=0$'da sonsuz süreksizliğe sahiptir.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \int_0^{\textcircled{1}} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$$

keyfi seçim

II. Tip I. Tip

$= I_1 + I_2$ diyelim

$$I_1 = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \lim_{r\to 0^+} 2\arctan\sqrt{x}\,\Big|_r^1$$

$$= \lim_{r\to 0^+} 2\left[\underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} - \underbrace{\arctan r}_{0}\right]$$

$$= 2\,\frac{\pi}{4} - 0 = \pi/2$$

$u=\sqrt{x} \qquad (x=u^2)$

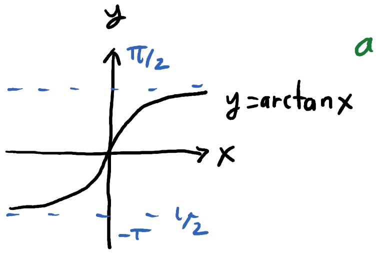
$du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = 2\int \frac{1}{1+u^2}\,du = 2\arctan u$$
$$= 2\arctan\sqrt{x}$$

$$I_2 = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \lim_{R\to\infty} 2\arctan\sqrt{x}\,\Big|_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\left[\underbrace{\arctan\sqrt{R}}_{\pi/2} - \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2}$$



$\arctan 1 = x$

$\tan x = 1$

$x = \pi/4$

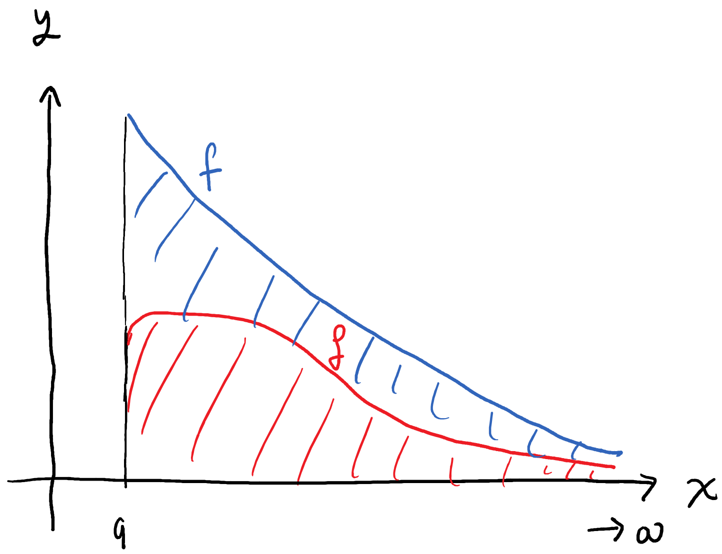
Sonuç olarak, verilen integral

$I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ 'ye yakınsar.

Karşılaştırma Testi : f ve g'nin $x \geq a$ için $f(x) \geq g(x) \geq 0$ olan sürekli fonksiyonlar olduğunu varsayalım.

a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ yakınsak $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsak

b) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ıraksak $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ıraksak



- f eğrisinin altındaki alan sonlu ise g'nin altında kalan alan da sonludur.
- g eğrisinin altındaki alan sonsuz ise f'nin altında kalan alan da sonsuzdur.

ÖRN. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x^5}\,dx$ b) $\displaystyle\int_3^{5} \frac{\ln x}{(x-3)^3}\,dx$

ÇÖZ. a) Bu integrali direk hesaplamak zordur. Diğer yandan,

$$x>1 \Rightarrow x^2+x^5 > x^2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+x^5} < \frac{1}{x^2}$$

olur. Büyük olan, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ integralinin ($p=2>1$) p-testinden yakınsak olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, karşılaştırma testinden, daha küçük olan $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x^5}\,dx$ integrali de yakınsaktır. Tabii, test bize hangi sayıya yakınsadığını vermez.

b) $x \geq 3$ için $\ln x > 1$'dir. Dolayısıyla,

$$\frac{\ln x}{(x-3)^3} > \frac{1}{(x-3)^3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer yandan, küçük olan integral

$$\int_3^5 \frac{1}{(x-3)^3}\,dx = \lim_{r\to 3^+} \int_r^5 (x-3)^{-3}\,dx = \lim_{r\to 3^+} -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-3)^2}\Bigg|_r^5$$

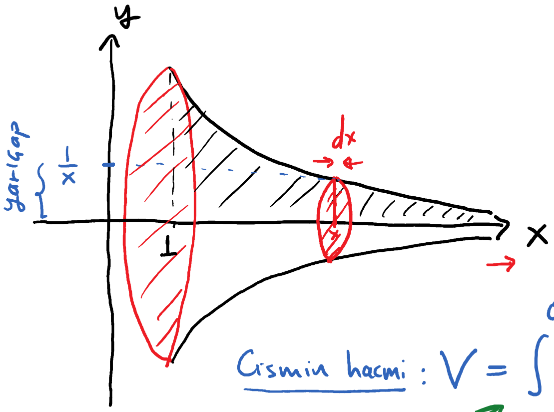
$$= \lim_{r\to 3^+} -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(r-3)^2}\right] = -\frac{1}{8} + \infty = \infty$$

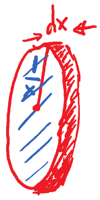
ıraksak bulunur. O halde, karşılaştırma testinden

$\displaystyle\int_3^5 \frac{\ln x}{(x-3)^3}\,dx$ integrali de ıraksak bulunur.

Meraklısına. $[1,\infty)$ aralığında, $y=\frac{1}{x}$ fonksiyonu ile x-ekseni arasında kalan sınırsız bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cisim sonlu bir hacme, sonsuz bir yüzey alanına sahiptir. Gösteriniz. (Oluşan bu cisme Cebrail'in Borusu (Gabriel's Horn) denir.)

Çöz. İlk olarak oluşan cismi çizip hacmini hesaplayalım:





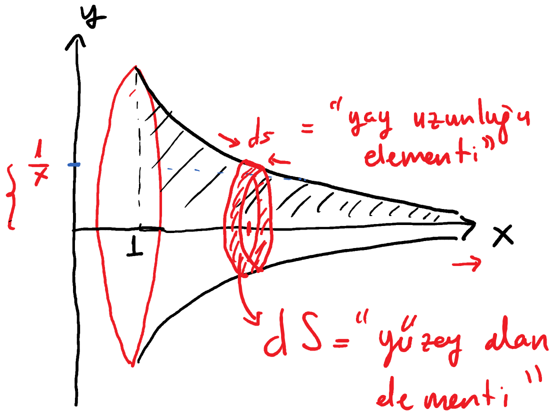
$$A(x)=\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{\pi}{x^2}$$

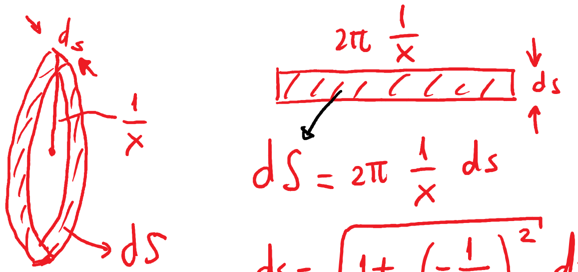
$\frac{1}{x}$-yarıçaplı diskin yüzey alanı

Cismin hacmi: $V=\int_1^\infty \underbrace{A(x)\,dx}_{\text{dx kalınlıklı diskin hacmi}} = \pi \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}_{\text{p-integrali } (p=2>1)} = \pi\left(\frac{1}{2-1}\right)=\pi$

I. tip has olmayan integral

Şimdi cismin yüzey alanı integralini kurup bu integralin ıraksak olduğunu gösterelim.





$$dS = 2\pi\frac{1}{x}\,ds$$

$$ds=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$$

O halde, $S=\int_1^\infty dS = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$ olur. En sağdaki has olmayan integrali direk hesaplamak zordur. Karşılaştırma testini kullanalım:

$x\geq 1$ için $\sqrt{1+1/x^4}>1$ ve dolayısıyla $\frac{1}{x}\sqrt{1+1/x^4}>1/x$ olur.

Küçük olan $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ integrali p-testinden $(p=1\leq 1)$ dolayı ıraksaktır. (Bu durum has olmayan integralin tanımı direk kullanılarak da görülebilir.) Bu durumda, S yüzey alanını veren integral de ıraksak olur. Yani, S yüzeyinin alanı sonsuzdur.