

2.4 Polinom ve Rasyonel Fonksiyonlar

Polinomlar. $n = 0, 1, 2, \dots$, olmak üzere,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Bas katsayı
 Bas terimi katsayılar (reel sayılar)

$f(x) = 1$ polinom, $f(x) = \sqrt{3}x + 5$ polinom

$f(x) = 3x^{-1}$ polinom değil, $f(x) = x^{\sqrt{2}} + x + 3$ polinom değil

Polinomun tanım kümesi tüm \mathbb{R} 'dir.

$n=0 \Rightarrow f(x) = a_0$ sabit fonk.

$n=1 \Rightarrow f(x) = a_1 x + a_0$ lineer fonk.

$n=2 \Rightarrow f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ karesel fonk.

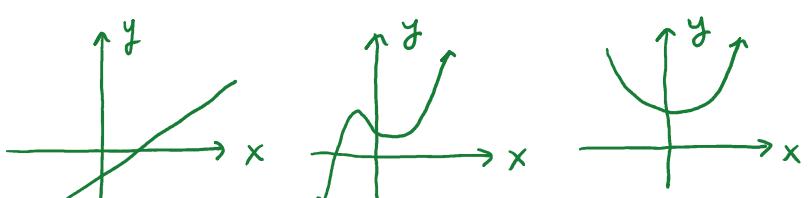
$n=3 \Rightarrow f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ kübik fonk.

Hepsi birer polinom örneğidir.

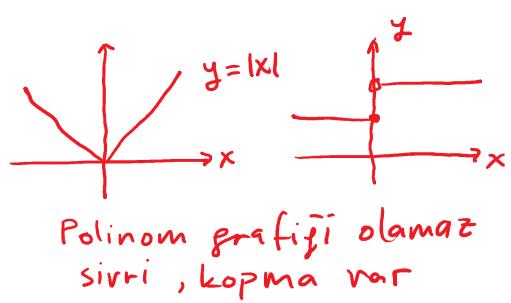
- Derecesi n olan bir polinom, en çok, n doğrusal çarpana sahip olabilir. Dolayısıyla bu polinomun en fazla n tane kökü olabilir. Örneğin;

$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$ n farklı real kök

$(x - x_1)^n \leftarrow x_1$ rahasık kök x_1, \dots, x_n 'lere
 $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0 \leftarrow f'$ nin sıfırı
 veya höküm denir.



Polinom grafikleri (kopma, boşluk, sırrı var yok)



Polinom grafiği olamaz
 sırrı, kopma var

Rasyonel Fonksiyonlar

olmak üzere

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}, d(x) \neq 0$$

formunda yazılıbilen fonksiyonlara rasyonel funk. denir.

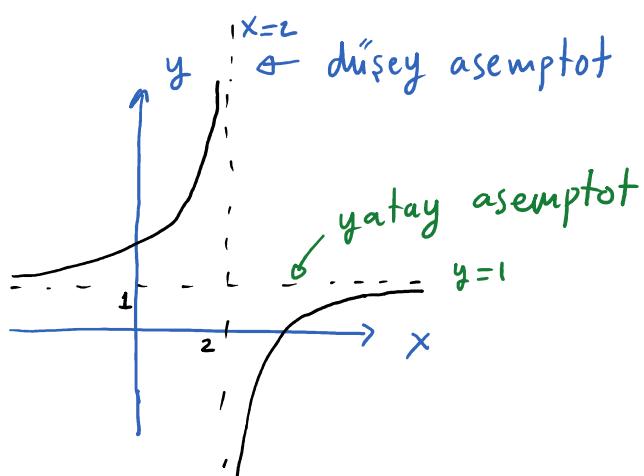
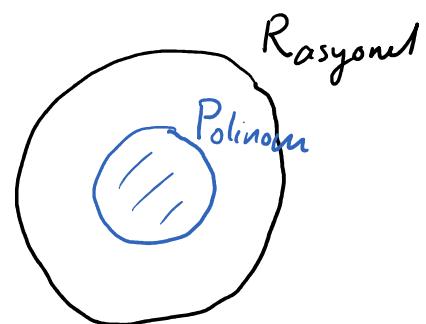
Rasyonel fonksiyonlar $d(x) \neq 0$ oldugu tüm reel sayırlarda tanımlıdır.

$$f(x) = 3, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = 3x^2 - 6x + 7, f(x) = 0$$

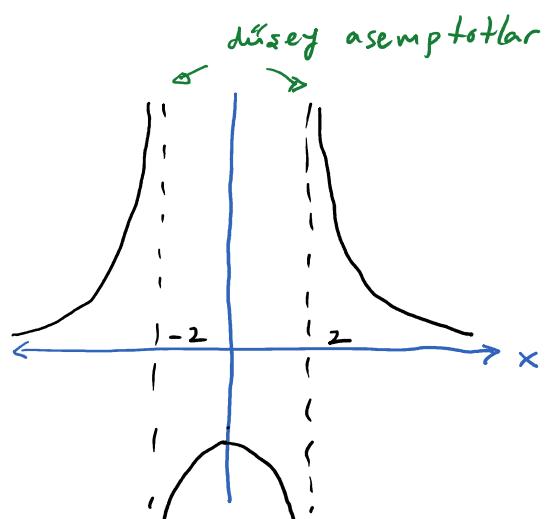
biner rasyonel fonksiyondur.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}, f(x) = \frac{x^3}{|x|}$$

rasyonel fonksiyon değildir.



$$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$$



$$f(x) = \frac{8}{x^2-4}$$

Rasyonel fonksiyon grafikleri (kompalar var)

(syf 88, öRN2) f rasyonel fonksiyonu

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-4} \quad \begin{matrix} \text{← polinom} \\ \text{← polinom} \end{matrix}$$

kuralıyla verilsin.

- Tanım kümesini bulunuz.
- x ve y kesmelerini bulunuz.
- Düsey ve yatay asymptotlarını, varsa, bulunuz.
- $-7 \leq x \leq 7$ için f 'nin grafiğini kabatasla çiziniz.

öz

a) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ paydayı sıfır yapar

$$T.K(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

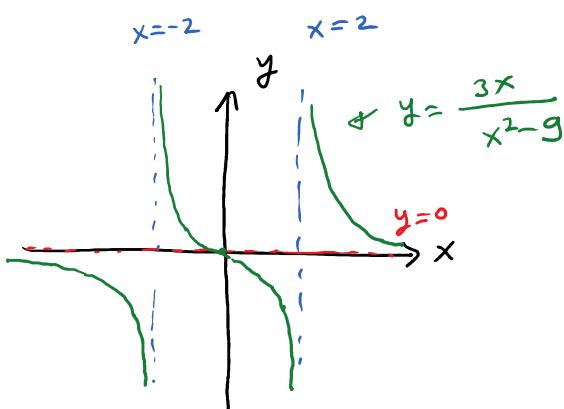
b) x -kesmesi : $y=0 \Rightarrow \frac{3x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0,$

y -kesmesi : $x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0}{0^2-4} = 0 //$

Fonksiyonun grafiği originden geçer.

- c) $n(x) = 3x$, $d(x) = x^2 - 4$; $d(-2) = d(2) = 0$ dir ve
 $n(-2) = -6 \neq 0$, $n(2) = 6 \neq 0$ olduğundan, $x = \pm 2$ düsey asymptot olur.

$$y = \frac{3x}{x^2-4} = \frac{x^2(\frac{3}{x})}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{\cancel{x^2}(\frac{3}{x}) \rightarrow 0}{1 - \cancel{\frac{4}{x^2}} \rightarrow 0} \xrightarrow{x \text{ler çok büyük}} \frac{0}{1-0} = 0 //$$



$y=0$ yatay asymptot olur.

d)

(syf 89, BP 2) g rasyonel fonksiyonu

$$g(x) = \frac{3x+3}{x^2-9}$$

kuralıyla verilsin.

- Tanım kümesini bulunuz.
- x ve y kesmelerini bulunuz.
- Düsey ve yatay asymptotlarını, varsa, bulunuz.
- $-10 \leq x \leq 10$ için f 'nin grafiğini kabataslaț aiziniz.

Göz. a) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$; f fonk. $x = \pm 3$ noktalarında tanimsızdır. 0 halde $T.K.(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ olur.

b) x -kesmesi : $y=0 \Rightarrow \frac{3x+3}{x^2-9} = 0 \Rightarrow 3x+3=0 \Rightarrow x=-1$

y -kesmesi : $x=0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$

c) $\underset{\text{pay}}{n(x)} = 3x+3$, $\underset{\text{payda}}{d(x)} = x^2-9$; $d(-3) = d(3) = 0$
 $n(-3) \neq 0$, $n(3) \neq 0$

0 halde, $x = \pm 3$ düsey asymptot olur.

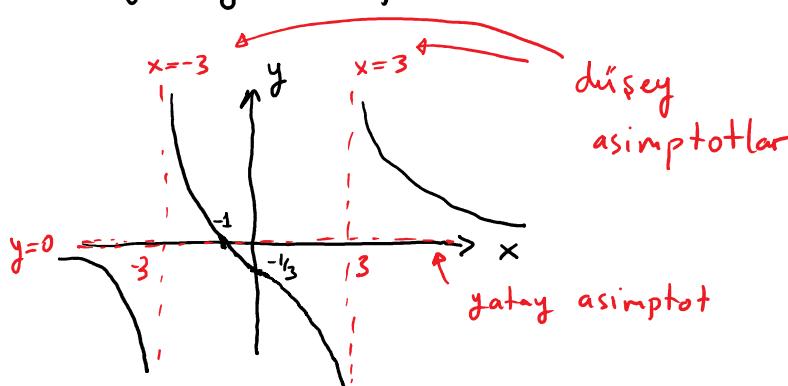
$$\bullet g(x) = \frac{3x+3}{x^2-9} = \frac{x^2(\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2})}{x^2(1 - \frac{9}{x^2})} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}}$$

x'ler çok büyük olduğunda

$$\rightarrow \frac{0+0}{1-0} = 0 //$$

$y=0$ yatay asymptot olur.

d)



Düsey ve Yatay Asimptot Bulma. $n, m \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

rasyonel fonksiyonu verilsin.

Düsey Asimptot:

- $d(c)=0$ fakat $n(c) \neq 0$ ise $x=c$ düsey asimptot
- $d(c)=0$ ve $n(c)=0$ ise ortak carpanları sadelestirdikten sonra duruma tekrar bakılır.

Yatay Asimptot:

- $\deg n(x) > \deg d(x)$ ise yatay asimptot yok.
- $\deg n(x) = \deg d(x)$ ise (yani $m=n$ ise) $y = \frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_n}$ yatay asimptot olur.
- $\deg n(x) < \deg d(x)$ ise $y=0$ yatay asimptottur.

Sıfır 91, ÖRNEK 3. $f(x) = \frac{3x^2+3x-6}{2x^2-2}$ ve $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+5x}$

fonksiyonlarının varsa düsey ve yatay asimptotlarını bulunuz.

Göz. a) $f(x) = \frac{3x^2+3x-6}{2x^2-2}$; $n(x) = 3x^2+3x-6$
 $d(x) = 2x^2-2$

$$2x^2-2 = 0 \Rightarrow 2(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$d(\pm 1) = 0, n(-1) = 3(-1)^2 + 3(-1) - 6 = -6 \neq 0$$
$$n(1) = 3+3-6 = 0$$

• $x = -1$ düsey asimptot

$$f(x) = \frac{3(x^2+x-2)}{2(x^2-1)} = \frac{3(x+2)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{3(x+2)}{2(x+1)}$$

O halde $x=1$ D.A. degildir.

$x=1$ de
tanımlı
payda
sıfır
degil

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3x - 6}{2x^2 - 2} \approx \frac{3x^2}{2x^2} \approx \frac{3}{2}$$

x çok büyükliğinde $y \approx \frac{3}{2}$ 'e yaklaşır. O zaman,
 $y = \frac{3}{2}$ yatay asimptot olur.

b) $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 5x}$; $T.K.(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$

Düsey Asimptot (D.A.) :

$$\frac{x(x^2 - 4)}{x(x+5)} = \frac{x^2 - 4}{x+5} ; \begin{array}{l} x = -5 \text{ D.A.} \\ x = 0 \text{ D.A. değil} \end{array}$$

Yatay Asimptot (Y.A.)

$\deg n(x) = 3 > \deg d(x) = 2 \Rightarrow$ yatay asimptot yoktur

$$f(x) \sim \frac{x^3}{x^2} \sim x \longrightarrow \text{açık büyür}$$

Syf 91, ÖRN 4. t - gün iş başında eğitimden sonra her bir gün iain $N(t)$ tane parçanın birleşimi ile veriliyor.

t sınırsız artarken $N(t)$ neye yaklaşı? Düşey ve yatay asimptotlar nelerdir? $0 \leq t \leq 100$ aralığında N 'nin grafiğini çiziniz.

Aöz. $t = 3 \Rightarrow N(3) = \frac{150}{7}$ tane paraayı günlük birleştiriyor.

$N(-4)$ tanımsız ancak $t > 0$ noktalarını dikkate alıyoruz.

$N(t) = \frac{50t}{t+4} \sim \frac{50t}{t} \sim 50$ Yani t sınırsız artarken $N \rightarrow 50$ olur.

Yani, $y = 50$ yatay asimptot olur.

