SONSUZ SERİLER

Sonlu tane sayıyı toplamak anlamlıdır ve kolaydır ve sonunda sayılar ne kadar büyük olursa olsun sonlu bir toplam elde edilir. Ancak, sonsuz tane sayının toplamından bahsetmek anlamlı mıdır? Sonsuz tane sayının nasıl toplanacağı o kadar açık değildir.

Örneğin,

$$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots$$

sayılarının toplamını sonlu bir sayı bulmak olanaklı değilken,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

sayılarının toplamı sonlu bir sayıya (1'e) eşittir. Bu bölümde bunları açıklayacağız. Serinin tanımı ile başlayalım:

(a_n) sonsuz bir dizi olsun. Bu dizinin terimlerini toplarsak elde edilen

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ifadesine sonsuz seri (seri) denir.

$$* \quad \sum_{\underset{\uparrow}{n=1}}^{\infty} \underset{\uparrow}{a_n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

indis   serinin genel terimi   yeniden indisleme

<u>Amaç 1</u>. $\sum a_n$ serisinin mümkünse toplamını bulmak.

<u>Amaç 2</u>. $\sum a_n$ serisinin toplamının sonlu mu yoksa sonsuz mu olduğunu belirlemek.

Kısmi Toplamlar Dizisi: (a_n) dizisinin terimlerini sırayla toplayarak şu şekilde yeni bir dizi oluşturalım:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1+a_2 = s_1+a_2 \\
s_3 &= a_1+a_2+a_3 = s_2+a_3 \\
s_4 &= a_1+a_2+a_3+a_4 = s_3+a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Genel terimi s_n olan diziye $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_n) dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ve bu serinin toplamı s'ye eşittir.

(s_n) dizisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır denir.

Yani, bir serinin toplamı o serinin kısmi toplamlar dizisinin limitidir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$= s_n$; kısmi toplamlar dizisinin genel terimi

Bu nedenle, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ yazmak serinin yeteri kadar terimi toplandığında s sayısına istenildiği kadar yaklaşılabildiği anlamına gelmektedir.

Dikkat. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde iki diziden bahsediyoruz.

1) Serinin genel terimi olan (a_n) dizisi.
2) Serinin kısmi toplamlar dizisi olan $(s_n)=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ dizisi.

Bu iki dizinin farkını iyi anlayın!

ÖRNEKLER

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\cdots+n+\cdots$ serisi yakınsak mıdır?

$S_1 = 1 = 1$

$S_2 = 1+2 = 3$

$S_3 = 1+2+3 = 6$

$\vdots$

$S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ kısmi toplamlar dizisi

$\left\{1, 3, 6, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots\right\}$

$\lim S_n = \lim \frac{n(n+1)}{2} = \infty$

Yani, verilen seri ıraksaktır.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ serisi yakınsak mıdır?

Kısmi toplamlar dizisinin genel terimini yazalım:

$S_1 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{4}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{8}$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2^n}$

$\vdots$

Yani, kısmi toplamlar dizisinin genel terimi

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

olur. Bu durumda

$$\lim S_n = \lim \left(1 - \cancelto{0}{\frac{1}{2^n}}\right) = 1$$

dir. Demek ki verilen seri yakınsaktır ve toplamı 1'dir.

Yani, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ olur.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\cdots$ serisi yakınsak mıdır?

Verilen terimler sonlu sayıda olsaydı bu toplamın sonucu 0 veya 1 olacağı belliydi. Ancak burada sonsuz tane terimi topluyoruz. Şimdi kısmi toplamlar dizisini oluşturalım:

$s_1 = 1$

$s_2 = 1-1 = 0$

$s_3 = 1-1+1 = 1$

$s_4 = 1-1+1-1 = 0$

$s_5 = 1-1+1-1+1 = 1$

$\vdots$

(s_n) dizisinin terimleri $\{1,0,1,0,1,\ldots\}$ şeklindedir. Görüldüğü üzere bu dizi hiçbir değere yakınsamaz çünkü sürekli 1 ile 0 arasında gidip geliyor. Bu durumda, $\lim s_n$ mevcut değil ve dolayısıyla $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Hatalı işlem:

$$\begin{aligned} 0 &= 0+0+0+\cdots \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1) \\ &= 1+0+0+0 = 1 \end{aligned}$$

buradaki seri (toplam) ıraksak olduğundan yapılanlar doğru değil.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise neye yakınsar?

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

"Teleskopik Seri"

$s_1 = \left(1-\frac{1}{2}\right)$

$s_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

$s_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$\vdots$

"Teleskopik Toplam"

$$s_n = \underbrace{\left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)}_{a_1}+\underbrace{\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)}_{a_2}+\underbrace{\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)}_{a_3}+\cdots+\underbrace{\left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}}-\cancel{\tfrac{1}{n}}\right)}_{a_{n-1}}+\underbrace{\left(\cancel{\tfrac{1}{n}}-\tfrac{1}{n+1}\right)}_{a_n} = 1-\frac{1}{n+1}$$

$\lim s_n = \lim \left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$ olduğundan verilen seri 1'e yakınsar.

Yani, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1$ 'dir.