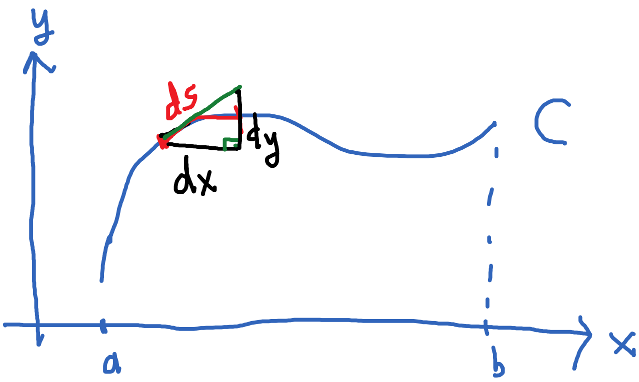
YAY UZUNLUĞU



ds : yay uzunluğu parçası (çook küçük)

dx çook küçük olduğunda dy ve dolayısıyla ds de çook küçük olacaktır ve ds düz bir çizgiden farksız olacaktır.

Pisagor Teoreminden,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= 1 + (y')^2$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

yay uzunluğu diferansiyeli

Bu çook küçük parçaları a'dan b'ye toplarsak

$\ell(C)$ = C eğrisinin a'dan b'ye yay uzunluğu

$$= \boxed{\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}.$$

ÖRN! $y = 2x^{3/2}$ eğrisinin $x=0$ ve $x=11$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çöz. $y' = 3x^{1/2}$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{9x+1}$$

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{9x+1}\,dx$$

$$\ell = \int_0^{11} ds = \int_0^{11} \sqrt{9x+1}\,dx$$

$u = 9x+1$

$du = 9dx$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=11 \Rightarrow u=100$

$$= \int_1^{100} \sqrt{u}\,\frac{du}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\int_1^{100} u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{u=1}^{100}$$

$$= \frac{2}{27}\left(100^{3/2} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{27}(999) = 74$$

Örn2. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ eğrisinin $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$ aralığında kalan parçasının yay uzunluğunu bulunuz

Çöz. $y' = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2}$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)^2+1}$$

$$= \sqrt{\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}+1}$$

$$= \sqrt{\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)^2} = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}$$

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx$$

$$l = \int_{1/2}^{2} ds = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1/2}^{2}$$

$$= \frac{33}{16}$$

ÖRN3. $y=\int_1^x \sqrt{t^3-1}\,dt$ eğrisinin $1\leq x\leq 4$ aralığında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZ.

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \sqrt{t^3-1}\,dt\right)$$

$$= \sqrt{x^3-1}$$

Analizin Temel Teoremi

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{(x^3-1)+1}$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = x^{3/2}$$

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = x^{3/2}dx$$

$$\ell = \int_1^4 ds = \int_1^4 x^{3/2}dx = \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_1^4$$

$$= \frac{2}{5}4^{5/2} - \frac{2}{5}1^{5/2}$$

$$= 62/5.$$