

2-5 Üstel Fonksiyonlar

- Bileşik faizde paranın büyümesini
- Nüfusun büyümesini
- Radyoaktif azalmayı
- Üretim fabrikasında bir montaj sürecini

İçeren çeşitli gerçek-dünya problemlerini modelleme ve çözmede üstel fonksiyonlardan faydalanırız.

$$f(x) = 2^x \quad \text{ve} \quad g(x) = x^2$$

↑
üstel fonk.

← değişken
← sabit

← sabit
← değişken
← kuvvet fonk.

Tanım (Üstel Fonk.) b sabit sayı olmak üzere

$$f(x) = b^x, \quad b > 0, b \neq 1$$

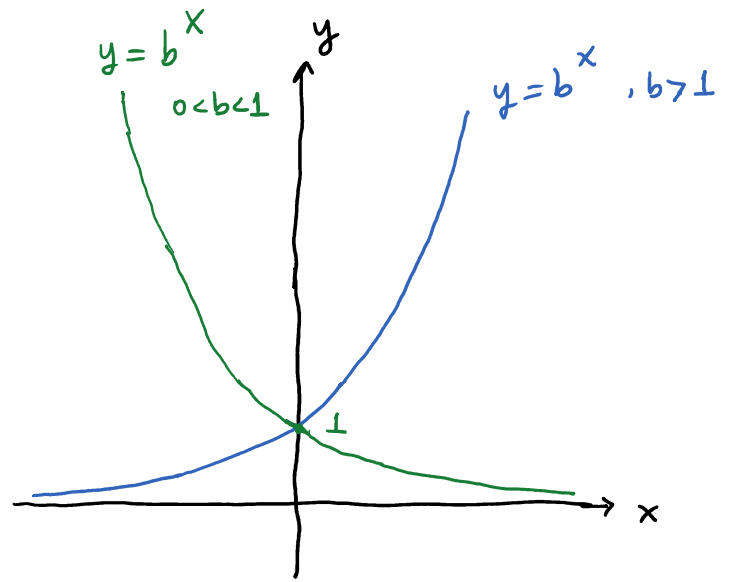
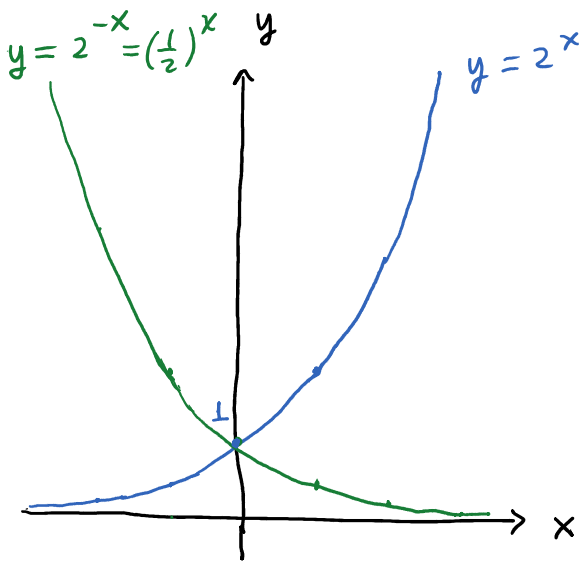
biçimindeki fonksiyonlara üstel fonk. denir. Burada b taban, x ise üstür.

- Üstel fonk. tanım kümesi tüm reel sayılar, görüntü kümesi ise pozitif reel sayılardır.

Not. $b = -2$ ve $x = \frac{1}{2}$ olsa idi; $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$

gibi kompleks sayı olurdu. Bunu istemiyoruz.

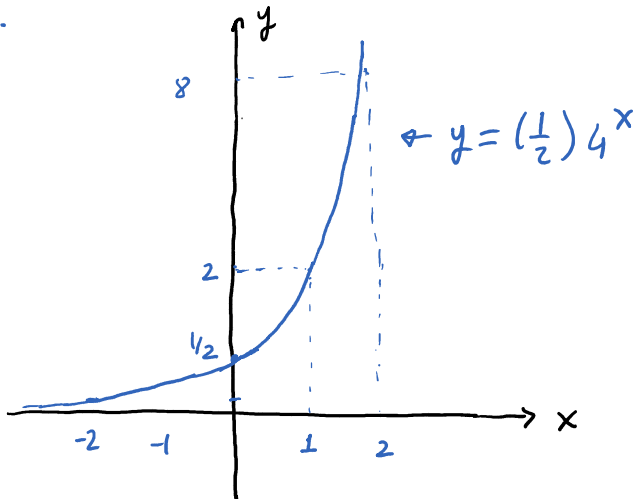
$b = 1$ olsa idi $f(x) = 1^x = 1$ sabit fonk. elde ederiz.



- 1) Tanım Kümesi : $\mathbb{R}$, Görüntü Kümesi : $(0, \infty)$
- 2) Tüm grafikler $(0,1)$ noktasından geçer.
- 3) Tüm grafikler boşluksuz , sıçramasız , sırtı uysuz sürçlü eğrilendir.
- 4) x -ekseni ($y=0$ doğrusu) yatay asimptottur.
- 5) $b > 1$ ise x artarken b^x artar.
- 6) $0 < b < 1$ ise x artarken b^x azalır.

(syf 97, örn 1) $-2 \leq x \leq 2$ için $y = (\frac{1}{2}) 4^x$ in grafiğini çiziniz.

Çöz .



$$x = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

Üstel Fonksiyonun Özellikleri :

a ve b pozitif , $a \neq 1$, $b \neq 1$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olsun.

1) Kuvvet Kuralı:

$$\cdot a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\cdot \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\cdot (a^x)^y = \underbrace{a^x \dots a^x}_{y \text{ tane}} = a^{x+\dots+x} = a^{x \cdot y}$$

$$\cdot (ab)^x = a^x b^x$$

$$\cdot \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$2) a^x = a^y \iff x = y$$

$$7^{5t+1} = 7^{3t-3} \Rightarrow 5t+1 = 3t-3$$

$$\Rightarrow 2t = -4$$

$$\Rightarrow t = -2 //$$

$$3) x \neq 0 \text{ için}$$

$$a^x = b^x \iff a = b$$

$$a^4 = 2^4 \Rightarrow a = 2 \text{ olmalı}$$

ÖRN. x i çözünüz.

$$a) 10^{2-3x} = 10^{5x-6} \quad b) 7^{x^2} = 7^{2x+3} \quad c) (1-x)^5 = (2x-1)^5 \quad d) 2^{x^2-1} = 1$$

Çöz. a) $2-3x = 5x-6 \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1$

Üstel denklemin çözümü 1'dir.

$$b) x^2 = 2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=3, -1$$

$$\text{A.K.} = \{-1, 3\}$$

$$c) (1-x) = (2x-1) \Rightarrow 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{2}{3}; \text{A.K.} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$d) 2^{x^2-1} = 2^0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ veya } x=-1 \quad \text{A.K.} = \{-1, 1\}$$

Üstel Fonksiyonlar için e Tabanı :

Hesap makinesinin tuşlarında 10^x ve e^x fonksiyonları vardır.

10 tabanı önemli çünkü bizim sayı sistemimiz 10 tabanlı bir sistemdir.

Peki e nedir ve bir taban olarak neden özellikle tercih edilir?

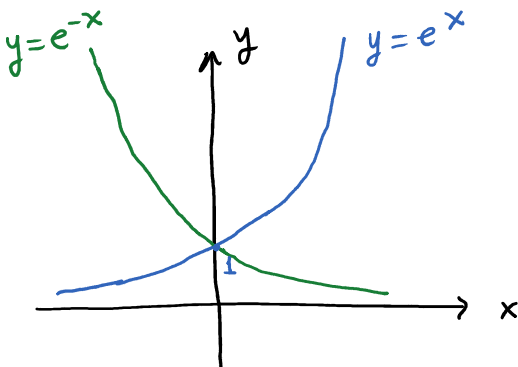
e sayısı, π 'ye benzeyen bir irrasyonel sayıdır. Yani, iki tamsayının oranı şeklinde yazılamaz veya bir sonlu ya da devirli ondalık sayı şeklinde yazılamaz.

x	$(1 + \frac{1}{x})^x$
1	2
10	2.593 74 ...
100	2.704 81 ...
1 000	2.716 92 ...
10 000	2.718 14 ...
100 000	2.718 27 ...
1 000 000	2.718 28 ...

x sınırsız artarken $(1 + \frac{1}{x})^x$ ifadesi bir irrasyonel sayıya yaklaşıyor ve bu sayıyı **e** sayısı olarak tanımlarız.

$$e := \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x //$$

$$e = 2.718 281 828 459 - - -$$



Tanım kümesi : $(-\infty, \infty)$

Görüntü kümesi : $(0, \infty)$

$$y = e^x > 0 \quad , \quad y = e^{-x} > 0$$

$\neq 0$ $\neq 0$

Bileşik Faiz

P = Anapara (bugünkü değer)

r = Yıllık faiz oranı (ondalık olarak)

m = Yıl başına bileşik faiz hesaplama dönemlerinin sayısı

t = Yıl olarak zaman

A = t yılın sonundaki tutar (gelecek değer)

Bileşik faiz formülü: $A = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = P b^t$

(Syf 102, ÖRNEK 5, BP5) Eğer 1000 \$, %10 bileşik faizi aylık hesaplamayla ödeyen bir hesaba yatırım yapılırsa, 10. yılın sonunda hesapta kaç \$ olacaktır?

Çöz. $P = 1000 \$$, $r = \%10 = 0.10$, $m = 12$

$t = 10$ iken $A = ?$

$$A = 1000 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12(10)} = 1000 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{120} = 2707.04 \$$$

$(1.00833)^{120} =$

(BP5) Eğer siz 5000 \$'ı, %9 bileşik faizi günlük hesaplamayla ödeyen bir hesaba yatırırsanız, 5. yılda hesabınızda kaç dolara sahip olursunuz?

Çöz. $P = 5000$, $r = \%9 = 0.09$, $m = 365$, $t = 5$, $A = ?$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = 5000 \left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{365(5)} = 5000 (1.0002465)^{1825} = 7841.13 \$$$

$\leftarrow$ üstel sayı

$$A = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \rightarrow e^{rt} \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e, \quad m \text{ sınırsızca büyükken}$$

$$= P e^{rt}$$

m çok büyük iken

Sürekli bileşik faiz formülü: $A = P e^{rt}$

(Syf 102, ÖRNEK) Eğer 1000 \$, %10 bileşik faizi sürekli olarak hesaplamayla ödeyen bir hesaba yatırım yapılırsa, 10. yılın sonunda hesapta kaç \$ olacaktır?

Çöz. $A = P e^{rt}$; $P = 1000 \$$, $r = \%10 = 0.10$, $t = 10$

$$A = 1000 e^{0.10(10)} = 1000 e^1 = 2718.28 \$$$

(Syf 104, Uyg 47) Bir kişi bugünden başlayarak 5 yıl sonra yeni bir araba için 15 000 \$ nakite sahip olmak istiyor. Eğer hesap %6.75 bileşik faizi her hafta hesaplamayla öderse, bugün hesabında kaç para olmalıdır?

Çöz.

$$P = ? \quad A = 15\,000, \quad t = 5, \quad r = \%6.75 = 0.0675, \quad m = 52$$

↑
1 yıldaki hafta sayısı

$$A = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

$$15\,000 = P \left(1 + \frac{0.0675}{52}\right)^{52(5)} = P (1.001298)^{260}$$

$$15\,000 = P (1.4011)$$

$$P = \frac{15\,000}{1.4011} = 10\,705.87$$

Yaklaşık olarak başlangıçta 10 705 \$ a sahip olmalı.