Lütfen çözümlerinizi basamak basamak ve net bir şekilde yaziniz.

SORU 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n}+1\right)^{n^{3/2}}$$

serisinin yakinsak olup olmadigini inceleyiniz.

SORU 2

$$1+11+111+1111+11111+\cdots+\underbrace{111111111\cdots1111}_{n-tane}$$

toplamını bulunuz.

SORU 3 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli iraksak bir seri olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$$

serisinin yakinsak olup olmadigini inceleyiniz.

SORU 4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}$$

seri toplamını bulunuz.

SORU 5

(a) $f(x)=\arctan(x)$ fonksiyonun $x=0$ noktasinda MacLaurin serisini ve bu serinin yakinsaklik yaricapi ve araligini bulunuz.

(b) Yukaridaki seri acilimini kullanarak asadaki toplamin:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

oldugunu gosteriniz.

SORU 6

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

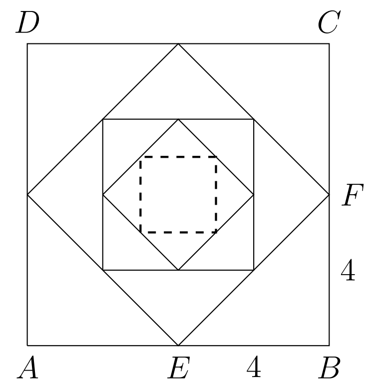
limitini hesaplayınız.

SORU 7 Kenar uzunlukları 8 birim olan karenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden ikinci bir kare çiziliyor.Bu şekilde içiçe çizilen sonsuz sayıda karenin

1. alanlarının toplamını

2. çevrelerinin toplamını

seri olarak ifade ediniz. Bu serilerin kısmi toplamlar dizisini bulunuz ve bu kısmi toplamlar dizisinin limitini bulunuz.



SORU 8 $y=x$ ve $x=6$ dogruları ile x eksenin tarafından sınırlanan alanı serilerden faydalanarak bulunuz.

SORU 9

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}$$

toplamını bulunuz.

SORU 10 Aşağıdaki serinin

$$\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}-\frac{1}{5\times6}-\frac{1}{6\times7}+\cdots$$

mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

SORU 11 $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots$ serisinin toplamini bulunuz.

SORU 12

(a) $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonuna $a=4$ noktasi civarinda derecesi 3 olan Taylor polinomunu yaklaşımını bulunuz.

(b) Yukaridaki polinom yaklaşımı kullanarak $\sqrt{6}$ hesaplayınız.

SORU 13 $f(x)=\frac{-5x}{(2+5x)^2}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

SORU 14

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k)}{\sqrt{k^3+1}}$$

serisinin yakinsak oldugunu gosteriniz.

SORU 15

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

serisinin iraksak oldugunu gosteriniz.

SORU 16 Sayılar teorisinde önemli bir yere sahip olan

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

Riemann zeta-fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

SORU 17 Alterne Seri Testini ifade ediniz ve bir ornekle aciklayiniz.

SORU 18 Integral Testini ifade ediniz ve bir ornekle aciklayiniz.

SORU 19

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

şeklinde tanımlanan serinin yakınsak olabilmesi için x degeri ne olmalıdır?

SORU 20 $x\in[0,1]$ icin $f_n(x)=\frac{1}{1+n^2x^2}$ ve $g_n(x)=nx(1-x)^n$ olsun. f_n ve $g_n$fonksyon dizilerinin noktasal yaknsak oldugunu ama duzgun yakinsak olmadigini ispat ediniz.

SORU 21 $f(x)=\sqrt{x}$ fonksyonunun $[0,\infty)$ araliginda duzgun surekli oldugunu gosteriniz.

SORU 22 $f(x)=x^3$ fonksyonunun $\mathbb{R}$ duzgun surekli olmadigini gosteriniz.

SORU 23 $f(x)=x^2$ fonksyonunun $\mathbb{R}$ duzgun surekli olmadigini gosteriniz.

SORU 24 $f(x)=x^2$ fonksyonunun $[0,1]$ araligi uzerinde duzgun surekli oldugunu gosteriniz.

SORU 25 $\mathbb{R}$ de bir seri $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ olsun. Eger $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ mutlak yakinsak ise $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ yakinsaktir.

SORU 26 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ olsun.

1. $[1,\infty)$ araligi uzerinde $f(x)$ fonksiyonu duzgun surekli oldugunu gosteriniz.
2. $f(x)$ fonksiyonu $(0,1]$ araligi uzerinde duzgun surekli olmadigini gosteriniz.

SORU 27 $0<x<1, n=1,2,\ldots$ olmak uzere, $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ seklinde verilsin. Ispat edinizki $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $(0,1)$ araligi uzerinde noktasal yakinsak iken duzgun yakinsak degildir.

SORU 28 $0<x<1, n=1,2,\ldots$ olmak uzere, $f_n(x)=\frac{x}{nx+1}$ seklinde verilsin. Ispat edinizki $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $(0,1)$ araligi uzerinde $f=0$ a duzgun yakinsaktir.

SORU 29 Kabul edelimki $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ mutlak yakinsak bir seri olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ icin $g_n\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyon dizisi $g_n(x)=a_nx^n$ seklinde tanimlansin. Bu taktirde $\sum_{n=1}^{\infty}g_n$ serisinin duzgun yakinsak oldugunu gosteriniz.

SORU 30 $A \subseteq \mathbb{R}$ (bos kume olmasin) ve $A \to [0, \infty)$ tanimli fonksiyonlarin serisi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ olsun. Kabul edelimki bir $N \in \mathbb{N}$ vardir ve oyleki $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq N$ icin $f_n(x) \leq g_n(x)$ olsun. Eger $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ duzgun yakinsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi de duzgun yakinsaktir.

SORU 31 $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ pozitif terimli diziler ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ raksak olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n+b_n}$ serisi de raksak olmak "zorundami"?

SORU 32 Eger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakinsak bir seri ise asagidaki ifadeyi ispat edin:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

SORU 33 Kabul edelimki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ serisi yakinsak olsun. Ispat edinizki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\beta}}$$

serisi $\beta > 1/2$ icin yakinsaktir.

SORU 34

1. Gosterinizki $[0,1]$ araligi uzerinde $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ fonksiyon dizisi $f = 0$ yakinsamasina ragmen $\int_0^1 f_n dx \nrightarrow 0$ dir.

2. f_n fonksiyon dizisi duzgun yakinsakmidir?

SORU 35 $f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}$ eklinde verilen fonksiyon dizisinin $[0, \infty)$ aral zerinde dzgn yaknsakln inceleyiniz.

SORU 36 Bir A kmesi zerinde a_n bir Cauchy dizisi ve f de dzgn srekli fonksiyon olsun. Gosterinizki $f(a_n)$ de bir Cauch dizisidir.

SORU 37 $\sum_n a_n$ ve $\sum_n b_n$ iki iraksak seri olmasna ragmen $\sum_n a_n b_n$ serisinin yakinsak olabilecegini gsterin.

SORU 38 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ positif terimli yaknsak bir seri ise her $x \in R$ icin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ seriside yaknsakmdr?

SORU 39 $(-\pi \leq x \leq \pi)$ araligi uzerinde

$$f(x) = \pi - |x|$$

fonksiyonunun Fourier serisi acilimini bulunuz.

Çözüm:

Dikkat ederseniz f çift bir fonksiyondur ve böylece her n icin $b_n = 0$ dir.

$$a_0 = f \text{ fonksiyonunun grafiğinin altında kalan} = \pi$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi\cos nx - x\cos nx)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\frac{\sin nx}{n} - x\frac{\sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos n\pi}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2}{n^2\pi}\left(1 - (-1)^n\right)
\end{aligned}$$

Böylece f fonksiyonunun Fourier Serisi:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\cos nx$$

SORU 39

Asagida verilen fonksiyonun Fourier seriesini bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Çözüm:

$$2L = \pi \Longrightarrow L = \frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos 2nx}{2n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[\cos n\pi - \cos 0\right], \qquad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} +\dfrac{2}{\pi n} & n \text{ tek ise} \\ 0 & n \text{ cift ise} \end{cases}$$

Boylece f fonksiyonun Fourier serisi:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 6x + \frac{1}{5}\sin 10x + \ldots\right]$$

SORU 40 Kabul edelimki f diferansiyellebilir fonksiyon ve $[0, 2\pi]$ araligi uzerinde $\cos x$ fonksiyonuna dik olsun. Bu taktirde $f' = \frac{df}{dx}$ türev fonksiyonuda $[0, 2\pi]$ araligi uzerinde $\sin x$ fonksiyonuna dik olduğunu ispat ediniz.

Çözüm:

Soru 41

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{x^{3/2}}dx$$

integralinin yakinsak oldugunu gosteriniz.

Soru 42 $I = \int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{1+x}dx$ belirsiz integrali veriliyor. $1/4 < I < 1$ oldugunu gosteriniz.

Soru 43

$$\int_1^{\infty}\sqrt{x}\sin x^2 dx$$

integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz. (YG: $x^2 = t$ değişken değiştirmesi yapınız)

Soru 44

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$$

belirsiz integralininin yakınsak olduğunu gösteriniz ve değerini bulunuz. (YG: kısmi integral uygulayınız)

Soru 45 $n \in \mathbb{N}$, olmak üzere, $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^2x^2}$ fonksiyon dizisinin

$$-1 \le x \le 1$$

aralığında düzgün yakınsak olmadıgını gösteriniz.

Soru 46

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\int_0^{\pi} S(x)dx = \frac{\pi^4}{48}$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 47

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$$

fonksiyon serisinin

$$1 \le x < \infty$$

aralıgı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Soru 48

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{x}{n}$$

fonksiyon serisinin

$$0 \leq x \leq 1$$

aralıği üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Soru 49

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

fonksiyon serisinin her $x \in \mathbb{R}$ için düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Soru 50

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$$

fonksiyon serisinin $1 \leq x < \infty$ aralıgı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Soru 51

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$$

fonksiyon dizisi $-1 \leq x \leq 1$ aralığında düzgün yakınsak olmamasına rağmen terim terime integre edilebileceğini gösterin. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

dir.

Soru 52

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + n^3 x^2)}{n^2}$$

fonksiyon dizisinin $0 \leq x \leq 1$ aralğ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Yeni sorular eklenecek.

Günün sözü: "We must know-we will know! "
(*David Hilbert*)

Çözümler