

Çalışma soruları

Tanım [Basit eğri] $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Farklı $t_1, t_2 \in (a, b)$ noktaları için $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ oluyorsa α eğrisine basit eğri adı verilir (kendisini kesmeyen eğriye basit eğri denir).

S0

$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t^2 + t, \sin t, e^t)$ şeklinde verilen eğrinin $p = (0, 0, 1)$ noktasındaki Frenet vektörlerini hesaplayınız.

S1

$$\alpha : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisi şu şekilde tanımlansın:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t^2 - 1, t^3 - t, 0).$$

1. α eğrisinin regüler bir eğri olup olmadığını araştırınız.
2. α eğrisinin basit bir eğri olup olmadığını araştırınız.
3. α eğrisini çizin.

S2

$\alpha : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ eğrisinin yay uzunluğunu bulunuz.

S3

- $y = f(x) = e^x$ eğrisinin eğriligini hesaplayınız.
- eğriligin maksimum olduğu noktayı bulunuz.

S4

$x^2 + y^2 = 4$ çemberini saat yönünün tersi yönünde ve başlangıç noktası $(0, 2)$ olmak üzere parametrize ediniz.

S5

$\alpha(t) = (15 \cos \frac{t}{17}, 15 \sin \frac{t}{17}, \frac{8t}{17})$ helis eğrisinin eğriligini bulunuz.

S6

$y^2 = x^3$ şeklinde verilen eğriyi parametrize ediniz ve $(0, 0)$ ve $(4, 8)$ noktaların birleştiren yay uzunluğunu bulunuz.

S7

Parametrik denklemi $\alpha(t) = (t, t^2)$ şeklinde verilen parabolün burulmasını bulunuz.

S8

$\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi yay uzunluğu cinsinden parametrize edilmiş ve $\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0$ olsun. Eğer $\alpha(L/3) = (1, 3, 4)$ ise $|\alpha(\frac{2L}{3})|$ değerini bulunuz.

S9

$x^2 + y^2 = 1$ çemberini saat yönü yönünde parametrize ediniz.

S10

Parametrik denklemi: $x = \cos t$, $y = \sin t$ ve $z = t$ şeklinde verilen helis eğrisinin:

- Frenet çatısını bulunuz
- Eğriligini bulunuz
- Burulmasını bulunuz

S11

xy düzleminde birim hızlı bir eğri $\alpha(s)$ olsun. $e_1 = (1, 0)$ ve $e_2 = (0, 1)$ xy düzleminin standart bazları olmak üzere α eğrisinin hız vektörü

$$T(s) = \alpha'(s) = \cos(\theta(s))e_1 + \sin(\theta(s))e_2$$

şeklinde veriliyor.

- (i) $\theta(s)$ 'nin $T(s)$ ile e_1 arasındaki açı olduğunu ispat ediniz.
- (ii) α eğrisinin eğrilik: $\kappa = |\theta'(s)|$ olduğunu ispat ediniz.

S12

$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi

$$\alpha(t) = (3 \cos ht, 4 \sin ht, 3t)$$

şeklinde verilen α eğrisini

- yay uzunluğu cinsinden yeniden parametrize ediniz.
- birim hızlı olduğunu gösteriniz.

S13

$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı ve kabul edelimki her t için $|\alpha(t)| = 1$ olsun. Bu takdirde $\langle \alpha(t), \alpha''(t) \rangle = -1$

S14

$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı ve kabul edelimki her t için eğrilik $|\kappa(t)| = 1$ ve burulması $\tau = 0$ olsun. Eğer $\alpha(0) = (2, 0, 0)$, $\alpha'(0) = (0, 0, 1)$ ve $\alpha''(0) = (1, 0, 0)$. Bu takdirde $\alpha(\frac{\pi}{2}) = ?$

S15

Birim hızlı α eğrisi için aşağıdaki tanımları yazınız.

- eğrilik $\kappa(s)$
- asli normal vektör $N(s)$
- binormal vektör $B(s)$.

S16

$\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular eğrisinin yeniden parametrelenmesi olsun. Bu takdirde α ve β eğrilerinin aynı uzunluğa sahip olduklarını ispat ediniz.

S17

Bir otomobil $\alpha : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular eğrisi boyunca hareket etmektedir. Burada $\alpha(t) = (2t, t^2)$ şeklinde veriliyor. 3 saat sonra otomobilin aldığı yolun uzunluğunu bulunuz.

S18

$$\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$$

eğrisine $t = \pi/2$ noktasında dik olan düzlemin denklemini yazınız.

S19

Merkezi (a, b) ve yarıçapı R olan çemberin çevresini $2\pi R$ olduğunu gösteriniz.

S20

\mathbb{R}^3 de $p = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $v = (x_1, y_1, z_1)$ vektörü yönündeki bir L doğrusunun parametrik denklemi:

$$x = x_0 + x_1 t, \quad y = y_0 + y_1 t, \quad z = z_0 + z_1 t.$$

şeklinde verilir.

1. Hangi t degerleri icin L dogrusu

- xy -düzlemi ile kesisir
- xz -düzlemi ile kesisir
- yz -düzlemi ile kesisir

2. L dogrusuna paralel olan bir düzlemin denklemini bulunuz.

S21

\mathbb{R}^2 de görüntüsü $A = \{(x, y) : xy = 1, x > 0\}$ kumesi ile aynı olan parametrik bir eğri bulunuz.

S22

Yay uzunluğu cinsinden parametrize edilmiş bir eğriye ait teget(T), normal(N) ve binormal(B) vektorlerin türevi için Frenet formüllerini yazınız (matris formunda yazabilirsiniz).

S23

Eğer $\alpha(t)$ yay uzunluğu cinsinden parametrize edilmiş bir eğri ise $\alpha''(t) \perp \alpha'(t)$ olduğunu gösteriniz.

S24

Eğer $\alpha(t)$ birim hızlı bir eğri ise $\kappa(t) =$

S25

Eğer $\alpha(t)$ birim hızlı bir eğri ise $\tau(t) =$

S26

Parametrik denklemi $\alpha(t) = (1 + t^2, t, t^3)$ şeklinde verilen eğrinin Frenet catisini bulunuz.

S27

$\alpha(t) = (2t, \ln t, t^2)$ şeklinde verilen eğrinin $\alpha(1)$ ve $\alpha(e)$ noktaların birleştiren yay uzunluğunu bulunuz.

S28

$$x = e^{2t} + e^{-2t}, \quad y = 3 - 4t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

parametrik form da verilen eğrinin yay uzunluğunu bulunuz.

S29

$$r(t) = ((1/2) \sin(t^2), (1/2) \cos(t^2), (1/4)t^4), \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

verilen eğrinin uzunluğunu bulunuz.

S30

Compute the length of the arc of the semicubical parabola $y^2 = x^3$ between the points $(0, 0)$ and $(4, 8)$.

S31

$k(u)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere $\theta(s) = \int_0^s k(u)du$ olarak tanımlansın.

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos \theta(u) dt, \int_0^s \sin \theta(u) dt \right)$$

eğrisinin birim hızlı ve yönlendirilmiş eğrilik (signed curvature)

$$\underline{\kappa}(s) = \kappa(s)$$

olduğunu gösteriniz.

S32

α eğrisi basit kapalı ve çevresinin uzunluğu L_α , ve kapsadığı alan A_α olsun. α eğrisinin çevre uzunluğu λ defa büyütülmesi ile elde edilen yeni eğri β olsun. β eğrisinin kapsadığı alan ise A_β olsun. Bu taktirde $\frac{A_\alpha}{L_\alpha^2}$ ile $\frac{A_\beta}{L_\beta^2}$ arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulunuz.

S33

\mathbb{R}^2 de düzgün bir eğri α olsun. Kabul edelimki $\alpha''(s) \equiv 0$ olsun. α eğrisi hakkında ne söyleyebilirsiniz?

S34

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ birim hızlı olmayan reguler bir eğri olsun. α eğrisinin eğriligini bulunuz.

S35

$\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha = at + b$ fonksiyonunu yay uzunluğu cinsinden yeniden parametrize ediniz.

S36

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı ve eğriligi $\kappa > 0$ olsun. T, N, B Frenet çatısı için $T' = \kappa N$, $B' = -\tau N$, $N' = -\kappa T + \tau B$ Frenet förmülleri denir.

1.

$$B''$$

vektör alanını T, N, B cinsinden yazınız.

2. $N'' \cdot N < 0$ olduğunu gösteriniz.

S37

$\lambda > 0$ için $\alpha(t) = (e^t \cos(\lambda t), e^t \sin(\lambda t))$, $\lambda > 0$ eğrisinin

1. $(-\infty, t_0]$ aralığı üzerinde yay uzunluğunun bulunuz.2. α ile α' arasındaki açıyı bulunuz.

S38

α eğrisi \mathbb{R}^3 de birim hızlı ve eğriligi $\kappa \neq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\det[\alpha', \alpha'', \alpha'''] = \kappa^2 \tau$$

olduğunu gösteriniz. Burada τ (torsion) burulma fonksiyonunu temsil eder.

S39

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) elips eğrisinin

1. parametrik formunu yazınız

2. eğriligini hesaplayınız

3. eğriligin maximum olduğu noktaları bulunuz.

S40

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi $\alpha(s) = \left(3 \cos\left(\frac{s}{5}\right), 3 \sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}s\right)$ şeklinde veriliyor. α eğrisi için

1. Frenet çatısı: $\{T, N, B\}$ yi bulunuz.

2. Eğriligi bulunuz.

3. Torsion(burulma)i bulunuz.

S41

$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı ve kabul edelimki her t için α eğrisinin eğriligi: $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ olsun. $\beta(t) = \alpha'(t)$ şeklinde tanımlanan yeni β eğrisi için:

1. β nin reguler olduğunu

2. β nin eğriliginin $\kappa_\beta = \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}}$ olduğunu gösteriniz. Burada τ , α eğrisinin burulmasını (torsion) temsil eder.

S43

Uzunluğu $6m$ ve kapsadığı alan $3m^2$ olan basit kapalı bir eğri vardır.

Dođru *Yalınsız*

S44

γ diferansiyellenebilir bir eğri, $v(t) = |\gamma'(t)|$ eğrinin hızını ve $\kappa \neq 0$ eğriligini gösterin.

1.

$$\gamma''(t) = v'(t)T(t) + \kappa(t)|\gamma'(t)|^2N(t)$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz. Burada T ve N birim teget ve normal vektörleri temsil eder.

2.

$$|\gamma''| = ((v')^2 + \kappa^2 v^4)^{1/2}$$

olduğunu gösteriniz.

S45

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

elips eğrisinin uzunluğu L ve kapsadığı alan A ise

$$L \geq 2\pi\sqrt{ab}$$

olduğunu gösteriniz.

S46

$$z = x^2 + y^2$$

paraboloid yüzeyinin Gauss eğriligini bulunuz.

S47

Parametrik formu

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

şeklinde verilen yüzeyin ikinci temel formunu bulunuz.

S48

Parametrik formu

$$r(u, v) = (3u \cos v, 2u \sin v, u^2)$$

şeklinde verilen yüzeyin birinci temel formunu bulunuz.

S49

$$z = x^2 + y^2$$

paraboloid yüzeyi üzerinde

$$\alpha : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \rightarrow (r \cos t, r \sin t, t^2)$$

şeklinde verilen eğrinin uzunluğunu bulunuz.

S50

a ve b sabit olmak üzere,

$$r(u, v) = (a(u + v), b(u - v), 4uv)$$

şeklinde verilen yüzeyin Gauss eğriligini bulunuz.

S51

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ küre yüzeyinin bir parametrisasyonu:

$$\varphi(\theta, \phi) : \begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

şeklinde veriliyor. Burada $0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$.

- (i) Bu küre yüzeyi üzerindeki Riemann metrik tensorunu bulunuz.
- (ii) Metrik tensorunu kullanarak kurenin yüzey alanını bulunuz.

Cozum:

$$E = g_{11} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\rangle = r^2$$

$$F = g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right\rangle = 0$$

$$G = g_{22} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right\rangle = r^2 \sin^2(\theta)$$

Sonuc olarak metrik tensor:

$$g = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

b) Yuzey alanı:

$$S(A) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{r^4 \sin^2(\theta)} d\theta d\phi = 4\pi r^2$$

S52

 $x^2 + y^2 = a^2$ silindir yuzeyinin bir parametrisasyonu:

$$\varphi(h, \alpha) : \begin{cases} x = a \cos(\alpha) \\ y = a \sin(\alpha) \\ z = h \end{cases}$$

sekinde veriliyor.

- (i) Bu silindir yuzeyi uzerindeki Riemann metrik tensorunu bulunuz.
- (ii) Metrik tensorunu kullanarak silindirin yanal yuzey alanini bulunuz.

S53

$$r(u, v) = f(u) \cos v, f(u) \sin v, u$$

parametrik denklemi ile verilen donel yuzeyin

1. I. esas formunu

2. II. esas formunu

3. Gauss egriligini

bulunuz.

$r_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, 1)$, $r_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$, $r_{uu} = (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, 0)$, $r_{uv} = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0)$, $r_v = (-f(u) \cos v, f(u) \sin v, 0)$ elde edilir. $E = r_u \cdot r_u = 1 + f'^2$, $F = r_u \cdot r_v = 0$, $G = r_v \cdot r_v = f^2$ metrik tensorun katsayilari elde edilir. Birinci esas form:

$$I = ds^2 = Edu^2 + 2fdudv + Gdv^2$$

II. esas form icin once yuzeyin normalini bulalim:

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(-\cos v, -\sin v, f')}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

II. esas formun katsayilari:

$$L = r_{uu} \cdot n = -\frac{f''}{1 + f'^2}, \quad M = r_{uv} \cdot n = 0, \quad N = r_{vv} \cdot n = \frac{f}{1 + f'^2}$$

ve II. esas form:

$$II = -\frac{f''}{1 + f'^2} du^2 + \frac{f}{1 + f'^2} dv^2$$

$$\kappa_G = -\frac{f''}{f(1 + f'^2)^2}$$

S54

 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ küre yuzeyinin bir parametrisasyonu:

$$\varphi(\theta, \phi) : \begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

sekinde veriliyor. Burada $0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$.

- (i) Bu kure yuzeyi uzerindeki I. esas formu

- (ii) Bu kure yuzeyi izerindeki II. esas formu
- (iii) Kurenin Gauss egriligini
- (iv) Kurenin yuzey alanini bulunuz.

S55

$-\infty < t < \infty$ olmak uzere $\alpha(t) = (t^2, t^3 - at)$ seklinde verilen duzlem egrisi icin asagidakilerini cevaplayiniz.

1. Hangi a degerleri icin $\alpha(t)$ reguler bir egridir.
2. Hangi a degerleri icin $\alpha(t)$ basit bir egridir.
3. $\alpha(t)$ nin egriligini hesaplayiniz.

S56

\mathbb{R}^2 izerinde, $g = \begin{pmatrix} 1+x^2 & y \\ y & y^2 \end{pmatrix}$, $(x \neq 0, y \neq 0)$ Riemann metrigini goz onune alalim. Bu metrige gore $(0, 1)$ noktasini $(1, 0)$ noktasina baglayan dogrunun uzunlugunu bulunuz.

S57

$$z = f(x, y)$$

denklemleri ile verilen yuzeyin

1. I. esas formunu
2. II. esas formunu
3. Gauss egriligini bulunuz.

S58

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı egrisi ve $\forall s \in (a, b)$ icin

$$\alpha(0) = (0, 0, 0),$$

$$N(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$$

$$B(s) = (0, 0, 1)$$

şeklinde veriliyor. $\alpha(s)$ egrisini bulunuz.

S59

$A \neq 0$ olmak uzere, parametrik formu

$$r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, Au)$$

seklinde verilen yuzeyin

1. I. temel formunu
2. II. temel formunu
3. Gauss egriligini
4. Gauss egriliginin hangi nokta da minimum oldugunu bulunuz.

S60

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı egrisi veriliyor.

$$\alpha'''$$

vektör alanını T, N, B cinsinden yazınız. $\alpha''(s) = T'(s) = \kappa N$ dir. Tekrar turev alinirsa

$$\alpha''' = \kappa'N + \kappa N' = \kappa'N + \kappa(-\kappa T - \tau B)$$

elde edilir.

S61

\mathbb{R}^2 nin ust yari duzlemini, yani

$$\mathbb{H} = \{(x, y) : y > 0\}$$

uzayini

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

metrigrile goz onune alalim. Bu ust yari duzlemde

1. $[1, \epsilon]$ araliginin uzunlugunu bulunuz
2. $\epsilon \rightarrow 0$ iken $[1, \epsilon]$ araliginin uzunlugunu bu uzayda verilen metrige gore yorumlayiniz.

S62

$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\alpha(0) = (0, 0, 3)$$

$$\alpha'(0) = (1, 0, 0)$$

$$\alpha''(0) = (0, 2, 0)$$

$$\kappa(t) = 2$$

$$\tau(t) = 0$$

sekinde verilen birim hizli α egrisini bulunuz.

Not: 62. ve 14. sorular ayni tip olmasina ragmen 62. soruyu 14. soru gibi cozmek zor. 62. soruyu cozen 14. soruyu da cozer.) Biraz ipucu verelim. Frenet formullerini kullaniniz. T'' yi T cinsinden yaziniz. Yani T icin 2. mertebeden diferensiyel denklem elde etmelisin ve bu Diferensiyel denklemi verilen sınır deger kosullari altında cozmelisin.

S63

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hizli ve egriligi $\kappa \neq 0$ olsun. \mathbf{T} ve \mathbf{N} birim teget ve normal vektorler olmak uzere, $\lambda \in \mathbb{R}$ sayisi icin

$$\gamma_\lambda(s) = \gamma(s) + \lambda N(s).$$

sekinde tanimlanan $\gamma_\lambda(s)$ egrisinin egriligini bulunuz.

S64

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

denklemlerle verilen yuzeyin

1. I. esas formunu
2. II. esas formunu
3. Gauss egriligini bulunuz.

S65

\mathbb{R}^2 nin ust yari duzlemini, yani

$$\mathbb{H} = \{(x, y) : y > 0\}$$

uzayini

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

metrigrile goz onune alalim. Bu ust yari duzlemde

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

parametrik sekilde verilen egrinin $\alpha(\pi/6)$ den $\alpha(5\pi/6)$ ye kadar olan kismnin uzunlugunu bulunuz.

S

*****Ders notlari*****

Haftanın sözlere: "If I feel unhappy, I do mathematics to become happy. If I am happy, I do mathematics to keep happy"

(Alfred Renyi)

"The only way to learn mathematics is to do mathematics."

(Paul Halmos)

"We must know, we will know!"

David Hilbert