TELAFİ VİZESİ CEVAPLARI

1) a) $d_1(x,y) = 1 + d(x,y)$

M1) $d_1(x,y) = 1 + d(x,y) = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} x = y$

$1 + d(x,y) = 0 \Rightarrow \cancel{d(x,y) = -1}$

$d_1(x,y)$ METRİK DEĞİLDİR.

b) L bir vektör uzayı ve d, L'de ötelemeye göre değişmez ve homotesi özelliğine sahip bir metrik ise $\underline{\|x\| = d(x,\theta)}$ şeklinde tanımlanan

$x+z, y+z) = d(x,y)$

$(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| . d(x,y)$

$\|\cdot\|$ fonksiyonu bir norm ve $\forall x,y \in L$ için

$\underline{d(x,y) = \|x-y\|}$ dir.

* Bir vektör uzayı üzerindeki bir normla; ötelemeye göre değişmez ve homotesi özelliğine sahip bir metrik arasında 1-1 karşılık gelmenin var olduğunu anlıyoruz. *

2) a) (X,d) metrik uzay, $A \subset X$ ve $a \in X$ alalım.

$d(A,a) = \inf\{d(a,b) : b \in A\}$

a noktasının A kümesine uzaklığı.

$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$

A kümesinin B kümesine olan uzaklığı.

$çap(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\}$

A kümesinin çapı.

b) $(a_n) = \frac{1}{n}$ $\quad A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \cdots\}$

$(b_n) = -\frac{1}{n}$ $\quad B = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \cdots -\frac{1}{n} \cdots\}$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad d(A) = 1$ $\quad d(B) = 1$ $\quad \boxed{d(A,B) = 0.}$ $\quad \|$ $\quad d_\wedge(A) = 1$ $\quad d_\wedge(B) = 1$ $\quad \boxed{d_\wedge(A,B) = 1}$

LİNEER ALT UZAY : L, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve M, Lnin alt cümlesi olsun.

$\forall \alpha \in F$ ve $\forall x, y \in M$ için

$\alpha x + \beta y \in M$ oluyorsa,

Mye Lnin lineer alt uzayı denir.

LİNEER BİRLEŞİM : L, IF üzerinde lineer uzay ve $x \in L$ olsun.

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

olacak şekilde $x_i \in L$ ve $\alpha_i \in IF$ bulunabiliyorsa x vektörüne $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ vektörlerinin LİNEER BİRLEŞİMİ denir.

LİNEER BAĞIMSIZLIK: L, IF cismi üzerinde lineer uzay ve $S = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ de Lnin sonlu bir alt cümlesi olsun. $\alpha_i \in IF$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ olması $\forall i$ için $\boxed{\alpha_i = 0}$ olmasını gerektiriyorsa, S cümlesine veya $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ vektörlerine IF üzerinde LİNEER BAĞIMSIZ denir.

GEREN SİSTEM: L bir lineer uzay ve M, Lnin alt uzayı olsun. $A \subseteq L$ olmak üzere;

$\langle A \rangle = M \Rightarrow$ A, Myi geriyor veya Aya Mnin bir geren sistemi denir.

BAZ : L, IF üzerinde lineer uzay ve $B \subset L$ olsun. B lineer bağımsız ve B, Lyi geriyorsa yani

$\langle B \rangle = L \Rightarrow$ Bye Lnin bir bazı denir.

BOYUT ; Lnin herhangi bir bazındaki vektör sayısına Lnin boyutu denir ve kısaca BoyL ile gösterilir.

3) a) <u>LİNEER UZAY</u>: L boş olmayan bir cümle ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.

A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) Her $x, y \in L$ için $x+y \in L$ dir. (kapalılık)

G2) Her $x, y, z \in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir. (Birleşme).

G3) Her $x \in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır. (özdeş elemanın varlığı)

G4) Her $x \in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır. (ters eleman)

G5) Her $x, y \in L$ için $x+y=y+x$ dir. (değişme özelliği).

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1) $\alpha . x \in L$ dir. (skalerle çarpmaya göre kapalılık)

L2) $\alpha . (x+y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

L3) $(\alpha+\beta) x = \alpha x + \beta x$ dir.

L4) $(\alpha \beta) x = \alpha . (\beta x)$ dir.

L5) $1 . x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır.

L cümlesi ve sırasıyla A) ve B) şartlarını sağlayan

$+ : L \times L \to L$ (toplama) ve

$\cdot : F \times L \to L$ (skalerle çarpma) işlemlerine

Kısaca LİNEER UZAY işlemleri denir.

3) b) $f,g \in C[-1,1]$ $\quad f(x) \geq 0$
$g(x) \geq 0$

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \geq 0$ dır.
- Ancak $\alpha < 0$ için $(\alpha f)(x) = \alpha . f(x) < 0$ olduğundan bir LİNEER ALT UZAY <u>değildir.</u>

4) a) $\|f\| = \int_1^e |f(x)|\,dx$

$\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

$N_2)$ $\|\alpha f\| = \int_1^e |\alpha f(x)|\,dx = \int_1^e |\alpha| . |f(x)|\,dx$
$= |\alpha| . \int_1^e |f(x)|\,dx = |\alpha| . \|f\|.$

NORM BELİRTİR.

N1) $(\Rightarrow)$ $\int_1^e |f(x)|\,dx = 0$ olması demek $\boxed{f(x)=0}$ demektir. ✓

N1) $(\Leftarrow)$ $f=0 \Rightarrow \int_1^e |f(x)|\,dx = 0 \Rightarrow \|f\| = 0$

$\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ olduğunu gösterelim.
$(p \Rightarrow q)$. Bunun için $q' \Rightarrow p'$ yi gösterelim.

$\exists x_0 \in [1,e]$ için $|f(x_0)| \neq 0$ olsa idi f sürekli olduğundan $\exists \delta > 0, \ni \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ için $|f(x_0)| \neq 0 \Rightarrow \int_1^e |f(x)|\,dx \neq 0$ olurdu.

Çelişki olduğundan N1 ✓

N3) $\int_1^e |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_1^e |f(x)|\,dx + \int_1^e |g(x)|\,d$

$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ ✓

Kısmi integrasyon ile;

$\|f\| = \int_1^e |\ln x|\,dx =$ $\quad x . \ln x - \int_1^e x . \frac{dx}{x} = x . \ln x - x \Big|_1^e$

$\ln x = u$
$dx = dv$

$= \boxed{1}$

$\|x\| = 0 \iff x = \theta$

4) b) N1) $(\Rightarrow)$ $\|x\|^* = \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$

$(\Leftarrow)$ $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} = \dfrac{0}{1+0} = 0 = \|x\|^*$ ✓

N2) $\|\lambda x\|^* \stackrel{?}{=} \lambda \|x\|^*$

$\boxed{\lambda = 1}$ ve $\boxed{\lambda = 2}$ için bakalım.

$\|2.1\|^* = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$

$|2|.\|1\|^* = 2.\dfrac{1}{1+1} = 1$

$1 \neq \dfrac{1}{3}$ olduğundan N2 şartı SAĞLANMAZ.

NORM BELİRTMEZ.

N3) $\|x+y\|^* = \dfrac{\|x+y\|}{1+\|x+y\|} \leq \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} + \dfrac{\|y\|}{1+\|y\|}$

$= \|x\|^* + \|y\|^*$ ✓

Sadece N2) şartının sağlanmadığının görülmesi cevap için yeterlidir.