Fonksiyonel Analiz I - Final Sınavı Cevapları (24.01.2014)

1) a. $X=(X,d)$, $Y=(Y,\rho)$, $f: X \to Y$, $x_0 \in X$.

$\forall \varepsilon > 0$ için $d(x,x_0) < \delta$ olduğundan ;

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

olacak şekilde veya denk olarak ;

$$f(D(x_0,\delta)) \subseteq D(f(x_0),\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabiliyorsa f'e x_0 noktasında sürekli dir denir.

$(x,y) \in X$ ve (X,d) verilsin. $d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x)$

$$d(a,x) - d(a,y) \leq d(x,y)$$

x ile y nin rolleri değiştirilirse ;

$$|d_a(x) - d_a(y)| = |d(a,x) - d(a,y)| \leq d(x,y)$$

da fonksiyonun sürekliliği tanımından, $\varepsilon = \delta$ seçilirse d_a - sürekli olur.

1) b. (X,τ) , (Y,τ') iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$, $x \in X$ olsun. X de alınan her yakınsak (x_n) dizisi için $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x)$ oluyorsa ; f'e x noktasında dizisel süreklidir denir.

Teorem : (i) (X,τ), (Y,τ') topolojik uzay ve $f: X \to Y$ sürekli bir dönüşüm ise f dizisel süreklidir. Bu iddianın tersi genelde doğru değildir.

(ii) X ile Y iki metrik uzay ise f nin sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin dizisel sürekli olmasıdır.

İspat : (i) $x \in X$ ve U, $f(x)$ i ihtiva eden açık bir cümle olsun. $x \in f^{-1}(U)$ ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$, X de açıktır. Şayet $x_n \to x$ ise $n > n_0$ için $x_n \in f^{-1}(U)$ dir. O halde $n > n_0$ için $f(x_n) \in U$ yani $f(x_n) \to f(x)$ dir. Demek ki f, x noktasında dizisel süreklidir. x keyfi olduğundan f, X de dizisel süreklidir.

(ii) (X,d) ve (Y,ρ) birer metrik uzay ve f, X de dizisel sürekli olsun. Yani $x_n \to x$ ise $f(x_n) \to f(x)$ olsun. Bir an için f nin bir $x \in X$ noktasında sürekli olmadığını farzedelim. Bu takdirde her $\delta > 0$ için $x_n \in D(x,\delta)$ olduğunda $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\delta = 1/n$ olarak alınırsa $x_n \in D(x, 1/n)$ için $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ olur. Bu ise $x_n \to x$ iken $(f(x_n))$ dizisinin $f(x)$'e yakınsamadığını gösterir. Halbuki bu durum f nin dizisel sürekli oluşuna tezattır. f sürekli ise (i) şıkkından dolayı dizisel süreklidir.

2) a. Tam metrik uzay: (X,d) metrik uzay olsun. Eğer bu uzayda alınan her Cauchy dizisi, yine bu uzayda yakınsak ise, uzaya Tam Metrik Uzay denir.

$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \qquad d: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{matrix} x \to \infty \\ y \to \infty \end{matrix}\right\} \text{ için } d(x,y) \to 0$$

, $0 \notin \mathbb{N}$ olduğundan tam değildir.

$0 \in \mathbb{R}$ olduğundan tamdır.

2) b. $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$

N1) $\|x_0\| = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i = 0 \iff \|x_i\|_i = 0 \iff x_i = 0 \iff x = \theta$

N2) $\|\alpha x\|_0 = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha x_i\|_i = \sum_{i=1}^{n} |\alpha| . \|x_i\|_i = |\alpha| . \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i = |\alpha| . \|x\|_0$

N3) $\|x+y\|_0 \overset{?}{\leq} \|x\|_0 + \|y\|_0$

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i + y_i\|_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\|x_i\|_i + \|b_i\|_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i + \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_i$$

$\|x+y\|_0 \leq \|x\|_0 + \|y\|_0$ dir.

3) a. $\ell_\infty = \{ x=(x_k) \in \omega \ : \ \sup|x_k| < \infty \}$

$x_k \in \ell_\infty \Rightarrow \|x_k\| = \sup|x_k|$

$(x^m) \in \ell_\infty$ bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $d(x,y) = \sup|x-y| = \|x-y\|_\infty$ metriği yardımıyla;

$$\sup|x_i^m - x_i^n| < \varepsilon \ \ldots (*) \quad \text{(Cauchy dizisi yakınsaktır).}$$

Buradan, $|x_i^m - x_i^n| < \varepsilon$ elde edilebilir. Bu ise (x_i^r) nin $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi yakınsaktır. Yani $(x_i^r) \to x_i$ dir. Sonuçta;

$$|x_i^m - x_i| < \varepsilon \text{ elde ederiz.}$$

Şimdi ise göstermemiz gereken şey; (x_i) nin ℓ_∞ un elemanı olduğudur.

$x_i = x_i - x_i^m + x_i^m$ ifadesini $\mathbb{R}$ nin lineerliğinden yazabiliriz.

$$|x_i| = |x_i - x_i^m + x_i^m| \Rightarrow \sup|x_i| = \sup|x_i - x_i^m + x_i^m| < \infty$$

olduğunu gösterirsek $(x_i) \in \ell_\infty$ olduğu elde edilir.

$$\sup|x_i - x_i^m + x_i^m| \le \sup|x_i - x_i^m| + \sup|x_i^m|$$

$$\le \varepsilon + M$$

ε: Cauchy dizisinin yakınsaklığından. M: Cauchy dizisinin sınırlılığından.

$\le \varepsilon + M$ yani $(x_i) \in \ell_\infty$ elde edilir.

3) b. f dönüşümü $\|\cdot\|_1$ normuna göre sürekli olsun. Bu takdirde; $\forall \varepsilon > 0$ için

$\|x - x_0\|_1 < \delta$ olduğunda $\|f(x) - f(x_0)\|_1 < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

O halde $\forall x$ için;

$\|x - x_0\|_2 \le \alpha \|x - x_0\|_1 \le \alpha . \delta < \delta_1$ olduğunda

$\|f(x) - f(x_0)\|_2 \le \alpha . \|f(x) - f(x_0)\|_1 < \alpha . \varepsilon < \varepsilon_1$

olacak şekilde $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. O halde f, $\|\cdot\|_2$ normuna göre de süreklidir.

4) a. Kapalılık: (X,d) bir matrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\forall x \in A$ için $D(x,r) \subseteq A$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa, A ya x in açık altcümlesi veya A, X de açıktır denir. X in B altcümlesinin X deki tümleyeni yani $B^t = X - B$; X de açıksa B ye kapalı cümle denir.

Sınırlılık: (X,d) bir matrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$d(A) < \infty$ ise A ya sınırlı küme denir.

Kompaktlık: X bir matrik uzay olsun. X deki herbir dizi yakınsak bir altdiziye sahipse X'e kompakt denir. X in A altcümlesi X in bir altuzayı olarak kompakt ise A ya kompakt denir.

- Matrik uzayda: Kompakt $\Longrightarrow$ kapalı ve sınırlı (boyut yok)
- Sonlu boyutlu: Kompakt $\Longleftrightarrow$ kapalı ve sınırlı
- Sonsuz boyutlu: Kompakt $\Longrightarrow$ kapalı ve sınırlı

4). b. Denk norm: L lineer uzay; $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ bu uzayda iki norm olsun. $\forall x \in L$ için $a.\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b.\|x\|_1$ olacak şekilde pozitif a ve b sayıları varsa $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk norm denir.

$\|\cdot\|_1$ den elde edilen topoloji τ_1, $\|\cdot\|_2$ den elde edilen topoloji τ_2 olsun.

$\|\cdot\|_1$'e göre x in açık yuvarı $B_1(x)$, $\|\cdot\|_2$'e göre x in açık yuvarı $B_2(x)$ olsun.

* $U \in \tau_1$ ve $y \in U$ olsun. $\|x\|_2 \leq b\|x\|_1$ dan dolayı; $y \in B_1(x) \subset U$ açık yuvarı için $y \in B_2(x) \subset U$ olacak şekilde $B_2(x)$ açık yuvarı vardır. Böylece $U = \bigcup \{B_2(x) : x \in U\}$ olduğundan $U \in \tau_2$ dir.

* $V \in \tau_2$ ise $a.\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ dan dolayı benzer şekilde,

$$y \in B_1(x) \subset B_2(x) \subset V \Rightarrow V = \bigcup \{B_1(x) : x \in V\}$$

ve böylece

$V \in \tau_1$ elde edilir. Dolayısıyla $\tau_1 = \tau_2$ dir.

Yani topolojiler denktir.