Fonksiyonel Analiz-I

1. a- $s, c, c_0, \ell_1, \ell_\infty, S(A), D(A), \mathbb{R}^n$ kümelerini tanımlayıp, bu kümeleri uzay yapan fonksiyonları yazınız.

$S = \{ x = (x_k)$, (x_k) – sınırlı veya sınırlı olmayan tüm kompleks diziler $\}$

$z, w \in S \quad d(z,w) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|z_i - w_i|}{1+|z_i-w_i|}$ (s,d) metrik uzay

★ $c = \{ x = (x_k) : |x_n - \ell| \to 0, \ell \in \mathbb{R} \}$ $d(x,y) = \sup\{|x_i - y_i|\}$

★ $c_0 = \{ x = (x_k) : |x_n| \to 0 \}$ $d(x,y) = \sup\{|x_i - y_i|\}$

★ $\ell_\infty = \{ x = (x_k) : \sup|x_k| < \infty \}$ $d(x,y) = \sup\{|x_k - y_k|\}$

★ $\ell_1 = \{ x = (x_k) : \sum |x_k| < \infty \}$ $d(x,y) = \sum |x_k - y_k|$

★ $S(A) = \{ f : f : A \to \mathbb{R}$ – sınırlı $\}$ $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in A\}$

★ $\mathbb{R}^n = \{ x = (x_n) : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ x_n \in \mathbb{R} \}$ $\|x\| = \max\{x_i\}$

★ $D(A) = \{ f : f : A \to \mathbb{R} \}$ $(D(A), +, \cdot)$ Lineer uzay

1- b- (X,d) bir metrik uzay olsun.

$d_1(x,y) \overset{\text{tanım}}{=} \ln(1+d(x,y))$ olmak üzere (X,d_1) uzayı bir metrik uzay mıdır? Gösteriniz.

(X,d_1) metrik uzaydır. Gösterelim:

M1- $d_1(x,y)=0 \iff x=y$, $d_1(x,y)=\ln(1+d(x,y))=0$

$$1+d(x,y)=1$$

$$d(x,y)=0 \iff \boxed{x=y}$$

M2- $d_1(x,y)=d_1(y,x) \Rightarrow$

$$\boxed{d_1(x,y)}=\ln(1+d(x,y))=\ln(1+d(y,x))=\boxed{d(y,x)}$$

M3- $d_1(x,y) \overset{?}{\leq} d_1(x,z)+d_1(z,y)$

$$\underbrace{d_1(x,z)}=\ln(1+d(x,z)) \overset{?}{\leq} \ln(1+d(x,y)+d(y,z)) \leq$$

$$\leq \ln(1+d(x,y)+d(y,z)+\underbrace{d(x,y).d(y,z)}_{\geq 0})$$

$$\leq \ln[(1+d(x,y)).(1+d(y,z))] =$$

$$\ln(1+d(x,y))+\ln(1+d(y,z))$$

$$\leq \text{-----} = d_1(x,y)+d_1(y,z)$$

2- a- Metrik uzayda bir fonksiyonun sürekliliği tanımını yapınız. $(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzayında $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ şeklinde tanımlı fonksiyon verildiğinde, bu fonksiyonun sürekliliği ve düzgün sürekliliğini inceleyiniz.

(X, d) ve (Y, ρ), $f: X \to Y$ ve $x_0 \in X$ olsun.
$\forall \varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ iken $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
veya denk olarak $f(D(x_0, \delta)) \subseteq D(f(x_0), \varepsilon)$
olacak şekilde $\delta > 0$ mevcutsa f, x_0-noktasında süreklidir denir.

* $f(x) = x^2$, $S = (0, 4)$ f-de süreklidir.
$\varepsilon > 0$ $\delta = \varepsilon / 8$ $x_0 \in S$ seçelim. $0 < x_0 < 4$ ve
$0 < x < 4$, $0 < x + x_0 < 8$ $|x - x_0| < \delta$
kabul edelim. Bu takdirde; →

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = (x + x_0)|x - x_0| < (4+4).\delta = \varepsilon$$

* $f(x) = x^2$, $K = (0, \infty)$ de sürekli fakat düzgün sürekli değildir. x_0 seçelim.
$a = x_0 + 1$ ve $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2a}\right\}$ olsun.
a, x_0'a bağlı olduğundan δ da x_0'a bağlıdır. Bir $x \in S$ seçelim. Kabul edelim ki $|x - x_0| < \delta$. Bu takdirde $|x - x_0| < 1$,

$x < x_0 + 1 = a$ böylece $x, x_0 < a$,

böylece;

$$|x^2 - x_0^2| = (x + x_0)|x - x_0| \leq 2a|x - x_0| < 2a.\delta \leq 2a.\frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon$$

istenen durumdur.

2.a. Devamı $\Rightarrow$

$f(x) = x^2$, $K = (0, \infty)$ da düzgün sürekli değildir. $\exists\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \delta > 0$, $\exists\ x_0 \in K$,

$$\exists\ x \in K\ [\ |x - x_0| < \delta \text{ ve } |x^2 - x_0^2| \geq \varepsilon\ ]$$

$\varepsilon = 1$ olsun. $\delta > 0$ seçelim. $x_0 = \frac{1}{\delta}$ ve

$x = x_0 + \frac{\delta}{2}$ olsun. Bu takdirde

$$|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta \text{ fakat;}$$

$$|x^2 - x_0^2| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

istenen durumdur. (δ küçük old. x_0 büyük oluyor)

2-b- Dizisel süreklilik kavramını açıklayınız. Metrik ve topolojik uzaylarda süreklilik ile dizisel süreklilik ilişkisini ifade edip, ifadenizi ispat ediniz.

(X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzay ve $f: X \to Y$ ve $x \in X$ olsun. X de $x_n \to x$ olan $\forall\ x_n$ dizisi için; $f(x_n) \to f(x)$ oluyorsa; f'e x noktasında Dizisel süreklidir denir.

* Topolojik uzaylarda; sürekli $\Rightarrow$ Dizisel sürekli

** Metrik uzaylarda; sürekli $\Leftrightarrow$ Dizisel süreklidir.

$\rightarrow$

★ ve ★★ nın ispatı : M. bayraktar f. analiz s.145
Teo 2.33

★ $x \in X$ ve U, $f(x)$ i içeren bir açık cümle olsun. $x \in f^{-1}(U)$ ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$, X de açıktır. Eğer $x_n \to x$ ise $n > n_0$ için $x_n \in f^{-1}(U)$ dur. O halde $n > n_0$ için $f(x_n) \in U$ yani $f(x_n) \to f(x)$ dir. Demekki f, x noktasında dizisel süreklidir. x keyfi olduğundan f, X de dizisel süreklidir.

(X, d) ve (Y, ρ) birer metrik uzay;
★★ f dizisel sürekli olsun. Yani $x_n \to x$ ise $f(x_n) \to f(x)$ olsun. Bir an için f nin bir $x \in X$ de sürekli olmadığını farzedelim. Bu takdirde $\forall \rho > 0$ için $x_n \in D(x, \rho)$ olduğunda $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\rho = \frac{1}{n}$ olarak alınırsa $x_n \in D(x, \frac{1}{n})$ için $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ olur.

Bu ise $x_n \to x$ iken $(f(x_n))$ dizisinin $f(x)$'e yakınsamadığını gösterir. $[\, f(x_n) \not\to f(x) \,]$ Halbuki bu durum f nin dizisel sürekli oluşuna tezattır. f sürekli ise ★ dan dolayı dizisel süreklidir.

3 _ (a) _ $A = \{(-1, 1, 2), (2, -3, 1), (10, -24, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayı için bir baz olup-olmadığını gösteriniz.

$\alpha(-1, 1, 2) + \beta(2, -3, 1) + \gamma(10, -24, 0) = (0, 0, 0)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 10 & -24 & 0 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$$

lineer bağımsız.

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ old. dan lineer bağımsızdır.

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$x = x_1(-1, 1, 2) + x_2(2, -3, 1) + x_3(10, -24, 0)$

yazılabildiğinden A kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir bazdır.

3_b_ Yan cümle, bölüm uzayı tanımlarını yapınız. Bölüm uzaylarının değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

Yan cümle: L bir vektör uzayı ve M, L nin alt uzayı olsun, $x \in L$ olmak üzere $x+M = \{x+y : y \in M\}$ cümlesine M nin bir yan cümlesi denir.

Bölüm uzayı: L bir lineer uzay ve M, L nin bir alt uzayı olsun, Bu takdirde M nin farklı yan cümlelerinin $L/M = \{x+M : x \in L\}$ cümlesi

$(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$ ve $\alpha(x+M) = \alpha x + M$ işlemlerini ile lineer uzaydır. L/M, L nin parçalanışıdır.

Bölüm uzayı

* $x+M, y+M \in L/M \Rightarrow (x+M)+(y+M) = x+y+M$ ve $x+y \in L$ olduğundan $x+y+M \in L/M$ dir

* $$[(x+M)+(y+M)]+(z+M) = (x+y+M)+z+M$$
$$= (x+y)+z+M$$
$$= x+(y+z)+M$$
$$= x+M+[(y+M)+(z+M)]$$

* $\theta+M$, L/M nin özdeş elemanı ve $-x+M$, $x+M$ nin tersidir.

* $(x+M)+(y+M) = x+y+M = y+x+M$
$= (y+M)+(x+M)$ olduğundan L/M değişmeli gruptur.

4- a- Normlu uzay tanımını yapınız. Bu uzayda tanımlı norm fonksiyonunun, toplama işleminin ve skalerle çarpma işleminin sürekliliğini gösteriniz.

Normlu uzay: N bir lineer uzay olsun.
$\| \ \| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

N_1 - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N_2 - $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $(\alpha \in F)$

N_3 - $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [Üçgen eşitsizliği]

şartlarını sağlıyorsa $\| \ \|$ fonksiyonuna N de norm fonksiyonu, $(N, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

* $(N, \|\cdot\|)$ uzaydaki $\|\cdot\|$ fonksiyonu süreklidir.
$\big| \|x\| - \|y\| \big| < \|x-y\|$ göstermeliyiz.
$\|x-y\| < \delta = \varepsilon$ alınırsa süreklilik şartları sağlanmış olur.

$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow$

$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ Aynı zamanda;

$-(\|x\| - \|y\|) = \|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$

olduğundan sonuç olarak

$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| < \varepsilon$ olur.

4.a. II. yol;

$\|x\| = d(x,0)$ ve metrik fonk. sürekli old. $\|\cdot\|$ norm fonksiyonuda süreklidir.

* $(N, \|\cdot\|)$ $+ : N \times N \to N$ $\cdot : F \times N \to N$ işlemleri süreklidir.

$+$: $x_n \to x$, $y_n \to y$ iken $x_n + y_n \to x + y$ olduğunu göstermeliyiz.

$\|(x_n + y_n) - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$ dır.

$\cdot$: (α_n) F de bir dizi ve $\alpha_n \to \alpha$ olsun. Bu takdirde

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\|$$
$$\leq \|\alpha_n (x_n - x)\| + \|(\alpha_n - \alpha) x\|$$
$$= |\alpha_n| \, \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \, \|x\| \to 0$$

4.b. Metrik uzay ile normlu uzay içermesini ve ilişkisini ifade ediniz. İddianızı ispatlayınız.

* Her normlu uzay bir metrik uzaydır.

$d(x,y) = \|x-y\|$ olarak tanımlanan d-fonk bir metrik ve $\|x\| = d(x,\theta)$ dır.

M_1- $d(x,y) = \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$

M_2. $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \, \|y-x\|$
$= \|y-x\| = d(y,x)$

M_3. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$
$\leq d(x,z) + d(z,y)$

Yani $d(x,y) = \|x-y\|$ norm tarafından doğrulanan bir metrikdir #