FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
Matematik Bölümü

2013-2014 Eğitim-Öğretim Yılı, II. Dönem

MAT162 LİNEER CEBİR – II

Vize Sınavı

Tarihi : 14 / 04 / 2014 **Saati :** 14:00 – 15:15

Vize:	Değerlendirme			
1	**2**	**3**	**4**	**Toplam**
10	15p	15p	15p	100p
10p	10p	10p	15p	

Bölümü	Matematik Bölümü
Sınıfı	
Numarası	
Adı – Soyadı	

Not: Süre 75 dakikadır. Soruları cevaplarken ara işlemleri göstermeniz gerekir, işlemsiz doğru cevaplara puan verilmeyecektir.

Başarılar,

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

SORULAR CEVAP ANAHTARI

1-)(a) *Vektör uzayı* tanımını yapınız. ***Z*** tamsayılar kümesi, adi toplama ve skaler çarpma işlemleriyle birlikte bir vektör uzayımıdır, gösteriniz.

(b) *Lineer bağımsızlık, taban* ve *boyut* kavramlarını açıklayınız.

2-) (a) R^3 te $S=\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ kümesi verilsin. Span(S)=?

(b) R^3 te $v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ vektörlerinin lineer bağımlı olup-olmadığını araştırınız.

3-) (a) mxn reel matrisler kümesi R_n^m nin bir reel vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

(b) $\Re^3$ ün $W=\{(x,y,z): x\geq 0\}$ altkümesinin bir altuzay olup-olmadığını gösteriniz.

4-) (a) Bir matrisin rankı tanımını yapınız. R_5 uzayında $v_1=[1\ -3\ 0\ 2\ -3]$, $v_2=[2\ 1\ 7\ -3\ 8]$, $v_3=[3\ -4\ 5\ -4\ 1]$, $v_4=[1\ -3\ 0\ 10\ 5]$ vektörleri için $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ kümesi ile gerilen R_4 in V alt uzayının bir tabanını bulunuz.

(b) R^3 ün lineer bağımsız $S=\{(0,1,2),(1,0,1)\}$ altkümesini bir tabana tamamlayınız.

CEVAPLAR

1 a) Vektör Uzayı: Bir V kümesi aşağıdaki şartları sağlıyor ise;

$V\times V \to V$ $\qquad$ $\mathbb{C}\times V \to V$

$(u,v) \to u+v$ $\qquad$ $\lambda.v \to \lambda v \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$u\in V$ ve $v\in V$ iken $u+v\in V$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$, $v\in V$ iken $\lambda.v\in V$

$x,y,z\in V$ ve $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ için

$(V,+)$ değişmeli gruptur.

V1-) $(x+y)+z = x+(y+z)$

V2-) $x+y=y+x$

V3-) $x+\theta=x$ olacak şekilde bir $\theta\in V$ mevcut

V4-) $x+(-x)=\theta$ " " " $(-x)\in V$ mevcut

$(V,.)$ skalerle çarpma

V5-) $(\lambda+\mu).x=\lambda x+\mu x$ $\qquad$ V7-) $\lambda.(\mu x)=(\lambda\mu).x$

V6-) $\lambda.(x+y)=\lambda x+\lambda y$ $\qquad$ V8-) $1\in\mathbb{C}$ $\quad x.1=x$

V kümesine bir Vektör Uzayı denir.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin toplama ve skalerle çarpma işlemine göre vektör uzayı olup olmadığına bakalım.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi $\oplus$ ve $\odot$ sırasıyla adi toplama ve çarpma olmak üzere; bir vektör uzayı değildir.

Mesela $3 \in \mathbb{Z}$ ve $c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ için

$3\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ dir.

b) <u>Lineer bağımsızlık</u>: $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kümesi V vektör uzayının bir alt kümesi olsun.

$c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + \cdots + c_n . v_n = 0$

lineer dönüşümünün sıfır olduğu bu eşitlik ancak $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olması ile sağlanıyorsa S kümesine lineer bağımsız denir.

<u>Taban (Baz)</u>: Bir V vektör uzayının $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ alt kümesi için S lineer bağımsız ve S kümesi V vektör uzayını geriyor ise S kümesine V vektör uzayı için taban ya da baz denir.

<u>Boyut</u>: 0 uzayından farklı bir V vektör uzayının $(V \neq 0)$ herhangi bir bazındaki (tabanındaki) vektör sayısına V'nin boyutu denir ve $\text{boy}V$ ile gösterilir.

2\. a) R^3 te $S=\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

$a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$$a.\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\\0\\a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\b\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+0\\0+b\\a+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\\b\\a\end{bmatrix}$$

$$\text{span}(S)=\left\{\begin{bmatrix}-a\\b\\a\end{bmatrix} ; a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

b) R^3 te $V_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $V_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $V_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$$c_1.V_1+c_2.V_2+c_3.V_3=0$$

$$c_1.\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}c_1+c_2+c_3\\c_1+c_2\\c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2+c_3=0\\c_1+c_2=0\\c_1=0\end{cases}$$

$c_1=0$

$c_1+c_2=0\Rightarrow 0+c_2=0\Rightarrow c_2=0$

$c_1+c_2+c_3=0\Rightarrow 0+0+c_3=0\Rightarrow c_3=0.$

$c_1=c_2=c_3=0$ olduğundan R^3 te V_1,V_2,V_3 vektörleri lineer bağımsızdır.

3\. a) mxn reel matrisler kümesi R_n^m in bir reel vektör uzayı olduğunu gösterelim.

A, B ve C matrisleri; mxn tipinde matrisler olsunlar.

$A\in R_n^m$ ve $B\in R_n^m \Rightarrow A+B\in R_n^m$

$\lambda\in\mathbb{R}$ ve $A\in R_n^m \Rightarrow \lambda.A\in R_n^m$

$A=[a]_{mxn}$, $B=[b]_{mxn}$, $C=[c]_{mxn}$ denilirse

V1-) $([a]_{mxn}+[b]_{mxn})+[c]_{mxn}=[a]_{mxn}+([b]_{mxn}+[c]_{mxn})$

V2-) $[a]_{mxn}+[b]_{mxn}=[b]_{mxn}+[a]_{mxn}$

V3-) $[a]_{mxn}+[0]_{mxn}=[a]_{mxn}$ olacak şekilde $[0]_{mxn}\in R_n^m$

V4-) $[a]_{mxn}+[-a]_{mxn}=[0]_{mxn}$ " " $[-a]_{mxn}\in R_n^m$

Skalerle çarpma: ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere)

V5-) $(\lambda+\mu).[a]_{m\times n} = \lambda.[a]_{m\times n} + \mu.[a]_{m\times n} = [\lambda a]_{m\times n} + [\mu a]_{m\times n}$

V6-) $\lambda.([a]_{m\times n}+[b]_{m\times n}) = \lambda[a]_{m\times n} + \lambda[b]_{m\times n} = [\lambda a]_{m\times n} + [\lambda b]_{m\times n}$

V7-) $(\lambda.\mu)[a]_{m\times n} = \lambda.(\mu[a]_{m\times n})$

V8-) $1 \in \mathbb{C}$ $[a]_{m\times n}.1 = [a]_{m\times n}$

b) $\mathbb{R}^3$ ün $W=\{(x,y,z) ; x\geq 0\}$ alt kümesi bir alt uzay değildir. Çünkü örneğin $(2,1,5)\in W$ ve $-1\in\mathbb{R}$ olduğu hâlde $-1.(2,1,5)=(-2,-1,-5)\notin W$ Bu durum alt uzay olma şartlarından ikincisini sağlamaz. Bu nedenle W, $\mathbb{R}^3$ için bir alt uzay değildir.

4. a)

Rank: $m\times n$ tipinde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ matrisi verilsin.

A matrisinin satırlarının $\mathbb{R}^n$ de gerdiği alt uzaya A'nın satır uzayı ve benzer şekilde sütunlarının $\mathbb{R}^n$ de gerdiği alt uzaya da A'nın sütun uzayı denir.

Bir A matrisinin satır (sütun) uzayının boyutuna A'nın satır (sütun) rankı denir.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 7 & -3 & 8 \\ 3 & -4 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır uzayı S'deki vektörlerdir. Bu matrise elementer satır işlemleri uygulanarak satırca eşelon formunun

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi olduğu gösterilebilir.

A ve B matrisleri satırca denk olduklarından bu iki matrisin satır uzayları aynıdır. B'nin satır uzayının bir bazı $w_1 = [1 \; 0 \; 3 \; 0 \; 4]$, $w_2 = [0 \; 1 \; 1 \; 0 \; 3]$, $w_3 = [0 \; 0 \; 0 \; 1 \; 1]$ vektörleri için

$S = \{w_1, w_2, w_3\}$ dür.

b) $\mathbb{R}^3$ $\qquad S = \{(0,1,2), (1,0,1)\}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ ün doğal tabanı $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$S_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ kümesini ele alalım. $\mathbb{R}^3$ ün S'yi kapsayan tabanını bulmak için $S' = \{v_1, v_2, e_1, e_2, e_3\}$ diyelim. S_1 $\mathbb{R}^3$ ü gerdiğinden S' de $\mathbb{R}^3$ ü gerer.

$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3e_1 + a_4e_2 + a_5e_3 = 0$ denklemini alalım. Bu denkleme karşılık gelen lineer denklem sistemi

$$a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_2 + a_3 = 0$$
$$a_1 + a_4 = 0$$
$$2a_1 + a_2 + a_5 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ilk 1'ler 1.2. ve 3. sütunda olduklarından istenen taban $\{v_1, v_2, e_1\}$ dir.

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1 - 2e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2 - e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$