1) a) <u>Lineer operatör</u>: L ve L' aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: L \to L'$ operatörü

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$ şartlarını sağlıyorsa; Tye lineer operatör denir. ($\alpha \in \mathbb{F}$)

<u>Sınırlı operatör</u>: $\forall\, x \in L$ için

$\|T(x)\|' \leq k.\|x\|$ olacak şekilde bir $k > 0$ reel sayısı varsa, Tye sınırlı operatör denir.

<u>operatörün normu</u>: Özel olarak $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ için $\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq k$ yazabiliriz. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük kyı $k_0 = \|T\|$ ile gösterelim. Bu taktirde

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N, x \neq \theta \right\}$$

Tnin normudur.

1) b) <u>çekirdek</u>: $T: L \to L'$ verilsin.

$$\text{çek}\, T = \{x \in L : T(x) = \theta'\} = T^{-1}(\theta')\text{.dür.}$$

$T: L \to L'$, $T(x) = \theta'$ olarak tanımlanırsa,

<u>$\text{çek}(T) = L$</u> dir.

$I: L \to L'$, $L(x) = x$ olarak tanımlanırsa,

<u>$\text{çek}(I) = \theta$</u> dır.

2) a) $f \in C[a,b]$, $T(f) = f(x_0)$, $x_0 \in [a,b]$,

$$T(f+g) = (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = T(f) + T(g)$$
$$T(\lambda f) = (\lambda f)(x_0) = \lambda f(x_0) = \lambda . T(f) \ldots$$

<u>T LİNEERDİR</u>.

$f \in C[a,b]$ olduğundan f süreklidir. ve limiti mevcuttur.

Ve de $|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L|$

$\leq \varepsilon + |L| = M$ olduğundan

<u>f SINIRLIDIR</u>

$\|T(f)\| = \|f(x_0)\| \leq M$ .. f sınırlı olduğundan

<u>T de sınırlıdır.</u>

normu:

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(f)\|}{\|f\|} : f \in C[a,b] \right\}$$

$$= \sup \left\{ \frac{\|f(x_0)\|}{\|f\|} : f \in C[a,b] \right\}$$

$$\leq \sup \{ \|f(x_0)\| : f \in C[a,b] \} \leq 1 \text{ dir.}$$

≥ 1 olması da benzer şekilde gösterilebilir.

O zaman $\boxed{\|T\| = 1}$.

2) b) Sınırlıysa $\Rightarrow$ Düzgün süreklidir.

T lineer ve sınırlı olduğundan

$$\|T(x) - T(y)\|' = \|T(x-y)\|' \leq k . \|x-y\|$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ alınırsa $\|x-y\| < \delta$ için

$\|T(x) - T(y)\|' < \varepsilon$ olur. O halde

T, N'de süreklidir, düzgün süreklidir.

3) a) Sınırlı lineer fonksiyonel:

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere L, F üzerinde bir vektör olsun. $f: L \to \mathbb{F}$, fonksiyonel denir. f lineer ise f'ye lineer fonksiyonel denir. Yani

$|f(x)| \leq k . \|x\|$ olacak şekilde $k > 0$ reel sayısı varsa f'ye SINIRLI LİNEER FONKSİYONEL denir.

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : \|x\| \leq 1 \}.$$

Dual uzay: N ve N' normlu uzay olması halinde

$C(N,N') = \{ T : T: N \to N'$ sürekli lineer operatör $\}$

olsun. N normlu reel uzay ise,

N'nin dual uzayı $N^* = C(N, \mathbb{R})$ dir.

(tanımın daha açık hali syf. 161.)

3) b) $f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3$, $\|f\| = ?$

$|f(x)| \leq \sqrt{6}.\|x\|$ olduğundan f fonksiyonelinin $\sqrt{6}$ ile sınırlı olduğunu varsayalım:

$x = (2,-1,1)$ için $\|x\| = \sqrt{6}$ old;

$f(2,-1,1) = \sqrt{6}$ olup,

$\|f\| \geq \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} = \sqrt{6}$ çıkar. Ohalde $\|f\| = \sqrt{6}$ dır.

4) a) $f : C[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$

lineer ve sınırlılığını gösterelim.

$$f(\alpha x + y) = \int_{-1}^{0} \alpha x(t)dt - \int_{0}^{1} y(t)dt$$

$$= \alpha \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} y(t)dt = \alpha$$

$$f(\alpha x + y) = \int_{-1}^{0} (\alpha x + y)(t)dt - \int_{0}^{1} (\alpha x + y)(t)dt$$

$$= \left[\alpha \int_{-1}^{0} x(t)dt + \int_{-1}^{0} y(t)dt\right] - \left[\alpha \int_{0}^{1} x(t)dt + \int_{0}^{1} y(t)dt\right]$$

$= \alpha f(x) + f(y)$ ... f <u>lineerdir</u>

<u>sınırlılığı</u> ise: $|f(x)| = \left| \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt \right|$

$$\leq \int_{-1}^{0} |x(t)|dt + \int_{0}^{1} |x(t)|dt = \int_{-1}^{1} |x(t)|dt$$

$$\leq \max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t)| \int_{-1}^{1} dt = 2\|x\|$$

olduğundan;

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 2 \Rightarrow \boxed{\|f\| \leq 2}$$

4) b) <u>Norm fonksiyonu:</u> $\|\cdot\| : N \to \mathbb{R}$

$$x \to \|x\|$$

N1) $\|x\| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$ $(\alpha \in \mathbb{F})$

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ şartlarını sağlıyorsa norm; $(N, \|\cdot\|)$ oluyorsa normlu uzaydır.

<u>Fonksiyonel:</u> $f : L \to \mathbb{F}$ $(\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R})$

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : \|x\| \leq 1 \}$$

$$\to |f(x)| \leq \|f\| . \|x\|$$

<u>Her norm fonksiyonu bir fonksiyoneldir.</u>