MATEMATİK-II dersi

Bankacılık ve Finans, İşletme, Uluslararası Ticaret

Bölümleri için FİNAL Çalışma Soruları

1] $\int xe^{x^2}dx$ =?

Çözüm: $\left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ 2xdx = du \\ xdx = \dfrac{du}{2} \end{array} \right| \Rightarrow \int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}xdx = \int e^u \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2}\int e^u du = \dfrac{1}{2}e^u + c = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + c$

2] $\int e^{-2x}dx$ =?

Çözüm: $\int e^{-2x}dx = \dfrac{1}{-2}e^{-2x} + c = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + c$

3] x üretim miktarını göstermek üzere, bir firmada marjinal kâr fonksiyonu, $P'(x) = 2x + 500$ olarak belirlenmiştir. Firmada 100 birimlik üretim için toplam kâr 20.000 birim ise, toplam kâr fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $P'(x)$ marjinal kâr fonksiyonu verildiğinde, $P(x)$ kâr fonksiyonunu belirsiz integral yardımıyla bulabiliriz.

$$\int P'(x)dx = \int (2x+500)dx = \frac{2x^2}{2} + 500x + c$$
$$= x^2 + 500x + c = P(x)$$

elde ederiz. Bulunan fonksiyondaki belirsiz olan c sabitini bulmak için, soruda verilenleri kullanalım. $P(x) = x^2 + 500x + c$ ifadesinde; $x = 100$ için $P(x) = 20.000$ olduğunu kullanırsak; $P(100) = (100)^2 + 500.100 + c = 20.000$ den; $c = -40.000$ elde edilir. Sonuç olarak maliyet fonksiyonu $P(x) = x^2 + 500x - 40.000$ olarak elde edilir.

4] x üretim miktarını göstermek üzere, bir firmanın marjinal maliyet fonksiyonu, $C'(x) = 8x + 100$ olarak belirlenmiştir. Firmanın 40 birim üretim için toplam maliyet 80.000 birim ise, toplam maliyet fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $C'(x)$ marjinal maliyet fonksiyonu verildiğinde, $C(x)$ maliyet fonksiyonunu belirsiz integral yardımıyla bulabiliriz.

$$\int C'(x)dx = \int (8x+100)dx = \frac{8x^2}{2} + 100x + c$$
$$= 4x^2 + 100x + c = C(x)$$

elde ederiz. Bulunan fonksiyondaki belirsiz olan c sabitini bulmak için, soruda verilenleri kullanalım. $C(x) = 4x^2 + 100x + c$ ifadesinde; $x = 40$ için $C(x) = 80.000$ olduğunu kullanırsak; $C(40) = 4.(40)^2 + 100.40 + c = 80.000$ den; $c = 64.000$ elde edilir. Sonuç olarak maliyet fonksiyonu $C(x) = 4x^2 + 100x + 64.000$ olarak elde edilir.

5] $\int_0^4 e^{-0.5t}dt$ =?

Çözüm:

$$\int_0^4 e^{-0.5t}dt = \frac{1}{-0.5}e^{-0.5t}\Big|_0^4 = -2\left(e^{-2} - e^{0}\right) = -2\left(e^{-2} - 1\right) = -2\left(\frac{1}{e^2} - 1\right) = 2 - \frac{2}{e^2}$$

6] $\int_1^3 \frac{1}{x+5}dx$ =?

Çözüm: $$\int_1^3 \frac{1}{x+5}dx = \ln(x+5)\Big|_1^3 = \ln(3+5) - \ln(1+5) = \ln 8 - \ln 6$$

7] $x = 0$ ve $x = 3$ doğruları ile $y = x^2$ parabolü arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: $$\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$$

8] $f(x)=x^2$ parabolü, $x=1$ ve $x=2$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: $$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}$$

9] Bir şirket her ay x adet Tv üretmektedir. Aylık marjinal kâr (TL cinsinden) aşağıdaki gibi verilmiştir: $P'(x)=100-0.1x$, $(0\le x\le 400)$. Şirket hali hazırda ayda 200 Tv üretmektedir, ancak üretimi artırmayı planlamaktadır. Aylık üretimin 300 e çıktığı zamanki aylık kârdaki değişikliği bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}P(300)-P(200) &= \int_{200}^{300}(100-0.1x)\,dx = \left.\left(100x-0.05x^2\right)\right|_{200}^{300}\\ &=\left[100(300)-0.05(300)^2\right]-\left[100(200)-0.05(200)^2\right]\\ &=25500-18000=7500\end{aligned}$$

Aylık üretimin 200 birimden, 300 birime çıkarılması, aylık kârı 7500 TL artıracaktır.

10] Bir şirket her ay x adet Tv üretmektedir. Aylık marjinal kâr (TL cinsinden) aşağıdaki gibi verilmiştir: $P'(x)=100-0.2x$, $(0\le x\le 400)$. Şirket hali hazırda ayda 200 Tv üretmektedir, ancak üretimi artırmayı planlamaktadır. Aylık üretimin 300 e çıktığı zamanki aylık kârdaki değişikliği bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}P(300)-P(200) &= \int_{200}^{300}(100-0.2x)\,dx = \left.\left(100x-0.1x^2\right)\right|_{200}^{300}\\ &=\left[100(300)-0.1(300)^2\right]-\left[100(200)-0.1(200)^2\right]\\ &=21000-16000=5000\end{aligned}$$

Aylık üretimin 200 birimden, 300 birime çıkarılması, aylık kârı 5000 TL artıracaktır.

11] x üretim miktarı ve p de fiyat olmak üzere, bir mal için talep fonksiyonu, $p=-x+3$ olarak belirlenmiştir. Buna göre, $x_0=2$ için tüketici rantını bulunuz?

Çözüm: $$TR=\int_0^2\left[(-x+3)-(1)\right]dx=\left[\frac{-x^2}{2}+2x\right]_0^2=2$$

12] x üretim miktarı ve p de fiyat olmak üzere, bir mal için arz fonksiyonu, $p=16+x$ olarak belirlenmiştir. Buna göre, $x=6$ için üretici rantını bulunuz?

Çözüm: $\ddot{U}R=\int_0^6\left[22-(16+x)\right]dx=\left[6x-\frac{x^2}{2}\right]_0^6=\left[6.6-\frac{6^2}{2}\right]=18$

13] 2012 yılında bir ülkenin gelir dağılımı için *Lorenz* eğrisi $f(x)=0.5x+0.5x^2$ olduğuna göre gelir dağılımının *Gini indeksi* ni bulunuz.

Çözüm: Gini indeksi= $2\int_0^1[x-f(x)]dx=2\int_0^1\left[x-0.5x-0.5x^2\right]dx=2(0.5)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$

14] 2012 yılında bir ülkenin gelir dağılımı için *Lorenz* eğrisi $f(x)=x^2$ olduğuna göre gelir dağılımının *Gini indeksi* ni bulunuz.

Çözüm: Gini indeksi=$2\int_0^1[x-f(x)]dx=2\int_0^1\left[x-x^2\right]dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

15] 2012 yılında bir ülkenin gelir dağılımı için *Lorenz* eğrisi $f(x)=0.5x+0.5x^2$ olarak belirlenmiştir. İktisatçılar 2022 yılında bu ülke için *Lorenz* eğrisinin $g(x)=x^2$ olacağını tahmin etmektedirler. Eğer bu tahmin doğru ise gelir dağılımı için ne söylenebilir?

Çözüm: 2012 için *Gini* indeksi= $2\int_0^1[x-f(x)]dx=2\int_0^1\left[x-0.5x-0.5x^2\right]dx=2(0.5)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$

2022 için *Gini* indeksi $2\int_0^1[x-g(x)]dx=2\int_0^1\left[x-x^2\right]dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

Eğer bu tahmin doğru ise *Gini* indeksi artacaktır. Yani; 2022 yılında 2012 yılına göre gelir dağılımındaki eşitsizlik daha da artacaktır.

16] 2012 yılında bir ülkenin gelir dağılımı için *Lorenz* eğrisi $f(x)=x^2$ olarak belirlenmiştir. İktisatçılar 2022 yılında bu ülke için *Lorenz* eğrisinin $g(x)=0.5x+0.5x^2$ olacağını tahmin etmektedirler. Eğer bu tahmin doğru ise *gelir dağılımı* için ne söylenebilir?

Çözüm: 2012 için *Gini* indeksi= $2\int_0^1[x-g(x)]dx = 2\int_0^1\left[x-x^2\right]dx = 2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

2022 için *Gini* indeksi $2\int_0^1[x-f(x)]dx = 2\int_0^1\left[x-0.5x-0.5x^2\right]dx = 2(0.5)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$

Eğer bu tahmin doğru ise *Gini* indeksi azalacaktır. Yani; 2022 yılında 2012 yılına göre gelir dağılımındaki eşitsizlik azalacaktır.

17] $f(x,y)=x^2-2y^2+6x^2y-6x+8y-20$ fonksiyonu verilsin. $f_y(1,2)$ kısmi türevini bulunuz.

Çözüm: $f_y(x,y)=-4y+6x^2+8$ Buradan, $f_y(1,2)=-4.2+6.1^2+8=6$ elde edilir.

18] $f(x,y)=x^2-2y^2+6x^2y-6x+8y-20$ fonksiyonu verilsin. $f_x(1,2)$ kısmi türevini bulunuz.

Çözüm: $f_x(x,y)=2x+12xy-6$ ve, buradan, $f_x(1,2)=2.1+12.1.2-6=20$ elde edilir.

19] Bir şirket her ay, *A* ürününden *x* birim ve *B* ürününden de *y* birim üretmektedir. Aylık kâr denklemi $P(x,y)=-4x^2+4xy-3y^2+4x+10y+81$ fonksiyonu ile verilmiştir (aylık üretimler yüz birim cinsindendir). Buna göre firmanın kârını maksimum yapacak *x* ve *y* değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\begin{cases} P_x=-8x+4y+4=0 \\ P_y=4x-6y+10=0 \end{cases}$ ise $\begin{cases} 8x-4y=4 \\ 4x-6y=-10 \end{cases}$ elde edilir. Buradan $x=2$ ve $y=3$ bulunur.

$P_{xx}=-8,\ P_{yy}=-6$ ve $P_{xy}=4$ olduğundan $\Delta=P_{xx}.P_{yy}-P_{xy}{}^2=(-8)(-6)-(4)^2=32>0$ ve $P_{xx}=-8<0$ elde edilir. O halde $(x,y)=(2,3)$ kritik noktası bir yerel maksimum noktadır. Bu değerler yüz birim cinsinden verildiğinden $x=200$ birim ve $y=300$ birim bulunur. O halde *A* ürününden 200 birim ve *B* ürününden 300 birim üretim için maksimum kâr elde edilir.

20] Bir firmanın aylık net geliri $R = f_x(x,y) = 8x + 5y + 2xy - x^2 - 2y^2 + 10$ fonksiyonu ile verilmiştir. Burada *x* malzeme masraflarını, *y* aylık işçilik masraflarını (bin TL olarak) göstermektedir. Buna göre firmanın aylık net gelirini maksimum yapacak *x* ve *y* değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\begin{cases} f_x = 8 + 2y - 2x = 0 \\ f_y = 5 + 2x - 4y = 0 \end{cases}$ ise $\begin{cases} -2x + 2y = -8 \\ 2x - 4y = -5 \end{cases}$ elde edilir. Buradan $x = \dfrac{21}{2}$ ve $y = \dfrac{13}{2}$ bulunur. $f_{xx} = -2, f_{yy} = -4$ ve $f_{xy} = 2$ olduğundan $\Delta = f_{xx}.f_{yy} - f_{xy}{}^2 = (-2)(-4) - (2)^2 = 4 > 0$ ve $f_{xx} = -2 < 0$ elde edilir. O halde $(x,y) = \left(\dfrac{21}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$ kritik noktası bir yerel maksimum noktadır. Bu değerler bin TL olarak verildiğinden $x = 10500$ TL ve $y = 6500$ TL bulunur.

21] Büyük bir bilgisayar firmasının üretkenliği $f(x,y) = 15x^{0.4}y^{0.6}$ Cobb-Douglas fonksiyonu ile verilmiştir (burada *x* kaç birim işçilik kullanıldığını, *y* kaç birim sermaye kullanıldığını göstermektedir). Eğer firma şu anda 4000 birim işçilik ve 2500 birim sermaye kullanıyorsa, sermayenin marjinal verimliliği ne olur?

Çözüm: $f_y(x,y) = 9x^{0.4}y^{-0.4}$ kısmi türevi sermayeye göre verimliliğin değişim oranını gösterir ve sermayenin marjinal verimliliği olarak adlandırılır. 4000 birim işçilik ve 2500 birim sermaye kullanıldığında; $f_y(4000, 2500) = 9(4000)^{0.4}(2500)^{-0.4}$

22] Büyük bir bilgisayar firmasının üretkenliği $f(x,y) = 15x^{0.4}y^{0.6}$ Cobb-Douglas fonksiyonu ile verilmiştir (burada *x* kaç birim işçilik kullanıldığını, *y* kaç birim sermaye kullanıldığını göstermektedir). Eğer firma şu anda 4000 birim işçilik ve 2500 birim sermaye kullanıyorsa, işçiliğin marjinal verimliliği ne olur?

Çözüm: $f_x(x,y) = 6x^{-0.6}y^{0.6}$ kısmi türevi işçiliğe göre verimliliğin değişim oranını gösterir ve işçiliğin marjinal verimliliği olarak adlandırılır. 4000 birim işçilik ve 2500 birim sermaye kullanıldığında; $f_x(4000, 2500) = 6(4000)^{-0.6}(2500)^{0.6}$

23] Çelik üreten bir şirketin üretkenliği yaklaşık olarak $N(x,y) = 16x^{0.75}y^{0.25}$ Cobb-Douglas üretim fonksiyonu ile verilmiştir. (Burada *x* işçilik miktarını ve *y* sermaye miktarını göstermektedir). Eğer şirket 3000 birim işçilik ve 1000 birim sermaye kullanıyorsa kaç birim çelik üretmiş olacaktır.

Çözüm: $N(x,y) = 16x^{0.75}y^{0.25}$ olduğundan $x = 3000$ birim işçilik ve $y = 1000$ birim sermaye için $N(3000, 1000) = 16(3000)^{0.75}(1000)^{0.25}$ elde edilir.

24] Çelik üreten bir şirketin üretkenliği yaklaşık olarak $N(x,y)=16x^{0.25}y^{0.75}$ Cobb-Douglas üretim fonksiyonu ile verilmiştir. (Burada *x* işçilik miktarını ve *y* sermaye miktarını göstermektedir). Eğer şirket 3000 birim işçilik ve 1000 birim sermaye kullanıyorsa kaç birim çelik üretmiş olacaktır.

Çözüm: $N(x,y)=16x^{0.25}y^{0.75}$ olduğundan $x=3000$ birim işçilik ve $y=1000$ birim sermaye için $N(3000,1000)=16(3000)^{0.25}(1000)^{0.75}$ elde edilir.

Sayfa	SORU
335	Örnek 3, Benzer Problem 3
336	Örnek 4
337	Benzer Problem 4, Örnek 5
338	Benzer Problem 5-6, Örnek 6-7
339	Benzer Problem 7-8, Örnek 8
358	Benzer Problem 6
360	88
371	67, 68, 69, 70
372	81
381	59, 60
392	71, 72
404	83, 84, 85
420	83, 86
430	13, 14
448	44
465	84
466	85, 87, 88
474	31, 32
484	25, 26

Başarılar,