



FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
Matematik Bölümü

2014-2015 Eğitim-Öğretim Yılı, I. Dönem

FONKSİYONEL ANALİZ - I
FİNAL Sınavı

Tarihi : 06 / 01 / 2015

Saati : 10.⁰⁰ -- 11.¹⁵

Değerlendirme

1	2	3	4	Toplam
20p	15p	10p	10p	130p
15p	20p	20p	20p	

Bölümü	Matematik Bölümü	Not: Süre 75 dakikadır. Soruları cevaplarken ara işlemleri göstermeniz gerekir, işlemsiz doğru cevaplara puan verilmeyecektir. Sadece 100 puanlık soru cevaplanacaktır.
Sınıfı		
Numarası		Başarılar,
Adı – Soyadı		Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

SORULAR

1-) a) $d : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $d(x, y) = \frac{3}{2}|x - y|$ fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz. Bu metriğe göre aşağıdakileri cevaplayınız.

i) $d(3,5) = ?$ ii) $D[0,1] = ?$ iii) $A \subset \mathcal{R}$ ve $A = \{3\} \cup [4,7)$ ise $\text{Çap}(A) = ?$

b) Metrik uzayda, *yakınsak dizi* ve *Cauchy dizisi* tanımlarını yaparak, bu iki kavramın ilişkisini ifade ve ispat ediniz.

2-) a) *İzometri*, *izometrik izomorfi*, *izometrik uzay* tanımlarını yapınız. \mathcal{R} üzerinde tanımlı $f(x) = x^3$ dönüşümünün bir izometri olup-olmadığını gösteriniz.

b) L lineer uzayı üzerinde farklı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları ve de $k > 0$ verilsin. $\|x\|_2 \leq k\|x\|_1 \Leftrightarrow D_1(\theta, \frac{1}{k}) \subseteq D_2(\theta, 1)$ olduğunu ispatlayınız.

3-) a) *Metrik uzay*, *Normlu uzay* tanımlarını yapınız. Metrik uzay ile normlu uzay arasındaki içermeyi belirleyip, iddianızı gerçekleyiniz.

b) C^3 üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_\infty$ normlarını kullanarak, $x = (2, 3 + i, 2)$, $y = (2 + i, 2 - i, 3) \in C^3$ için aşağıdakileri hesaplayınız.

i) $\|x - y\|_1 = ?$ ii) $\|x - 2y\|_2 = ?$ iii) $\|2x - y\|_\infty = ?$ iv) $\|x\|_1 + \|x\|_2 + \|y\|_\infty = ?$

Not: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^3 |x_k|$ $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^3 |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ $\|x\|_\infty = \max_{k=1,2,3} |x_k|$

4-) a) $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ uzayını tanımlayınız, bu uzaydaki her eleman diferensiyellenebilir midir? açıklayınız.

b) (f_n) için *noktasal yakınsaklık* ve *düzgün yakınsaklık* tanımlarını yapınız.

$C[-5, 5]$ de $f_n \xrightarrow{\text{düzgün}} f$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-5}^5 f_n(x) dx \right) = \int_{-5}^5 f(x) dx$ olduğunu gösteriniz.

CEVAPLAR