(1)

5/79

2. (A)

$x = (n, x_2, x_3)$, $y = (m, y_2, y_3)$ $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere için

$x+y = (n, x_2, x_3) + (m, y_2, y_3) = (n+m, x_2+y_2, x_3+y_3) \in A$ dır.

Ancak $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x = (\alpha n, \alpha x_2, \alpha x_3) \notin A$ dır. Çünkü $\alpha n \notin \mathbb{Z}$ olabilir.

A bir alt uzay değildir.

(B) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ $\in B$ $x_1 + 2x_2 = 0$, $y_1 + 2y_2 = 0$ dır. $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

$(x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) = x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 = 0$

$x+y \in B$ dir.

$\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

$\alpha x_1 + 2\alpha x_2 = \alpha(x_1 + 2x_2) = \alpha . 0 = 0$

B bir alt uzaydır.

(C) Benzer şekilde gösterilebilir. C bir alt uzay değildir.

---

(3) L, A, $f, g \in A$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in S$ için $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ dır.

O halde $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$ old. $(f+g) \in A$ dır.

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$ olup $\alpha f \in A$ dır.

A bir alt uzaydır.

(4) $x,y \in A \cap B$ olsun $\Rightarrow$ $x,y \in A$ ve $x,y \in B$ dir. A ve B alt uzay old.

$x+y \in A$ ve $x+y \in B$ olup $x+y \in A \cap B$ dir

$\alpha x \in A$, $\alpha x \in B$; $\alpha x \in (A \cap B)$ $\quad A \cap B$ bir alt uzaydır

---

(5) ~~$K=F^3$ için~~ $\quad A+B = \{x = (\alpha+\beta, \beta, 0) : \alpha, \beta \in F\}$

---

(6) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_1(1,0,0,\ldots) + \alpha_2(1,1,0\ldots 0) + \cdots + \alpha_n(1,1,\ldots,1) = (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n, \alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n, \ldots, \alpha_n)$$
$$= (0,0,\ldots 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = 0 \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 \end{array} \right\}$$ elde edilir. Tüm i ler için $\alpha_i = 0$ old.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörleri lin. bağımsızdır. Herhangi bir $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F^n$ için

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \alpha_1(1,0,0\ldots 0) + \alpha_2(1,1,0,\ldots) + \cdots + \alpha_n(1,1,\ldots 1)$$
$$= (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n, \alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n, \ldots, \alpha_n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = y_n \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = y_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = y_1 \end{array} \right\}$$ denklemlerinden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ lar bulunabileceğinden $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektörlerin oluşturduğu lin. bağımsız küme F^n için bir baz oluşturur.

7 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(0,1,-1,0) + \alpha_3(0,0,0,3) = (\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, -\alpha_2, 3\alpha_3) = (0,0,0,0)$$

den $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ elde edilir. $\{x_1, x_2, x_3\}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

8 A

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,1,1) =$$

$$\Rightarrow = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3)$$

$$= (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

elde edilir. Yani $\{x_1, x_2, x_3\}$ lin. bağımsızdır. Öte yandan $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ için

$$y=(y_1,y_2,y_3) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,1,1) = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3)$$

$$\alpha_1 = \frac{y_1+y_2-y_3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{y_1+y_3-y_2}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{-y_1+y_2+y_3}{2}$$

olarak bulunur. O halde A kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir bazdır.

B ödev.

---

10 C $f,g\in C$ için $f(x)\geq 0$ ve $g(x)\geq 0$ old.

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\geq 0$ dır. Ancak $\alpha<0$ skaler için

$(\alpha<0)$ $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) < 0$ olduğundan C, $C[-1,1]$ in altuzayı değildir.

---

a $f,g\in A$, dif. bilir olsun. İkisinin toplamı da dif. bilirdir. $f+g$ – dif. bilir, αf dif. bilir. A altuzay

---

b $f,g\in B$, $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=g(x)$

$(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$

$(\alpha f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x)$

B – altuzay

İlave Problem: R^3 de $(1,0,0)$ vektörünü

$(0,1,1)$, $(1,0,1)$ $(1,1,0)$ vektörlerinin lin. birleşimi olarak yazınız.

Çözüm.

$$(1,0,0) = c_1(0,1,1) + c_2(1,0,1) + c_3(1,1,0)$$

$$c_1 = -c_3 = -\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$(1,0,0) = -\frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0)$$

8/95 (5)

(1) $N_1)$ $\|x\|=0 \Leftrightarrow 2|x|=0 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$

$N_2)$ $\|\alpha x\| = 2|\alpha x| = 2|\alpha||x| = |\alpha|\, 2|x| = |\alpha|\,\|x\|$

$N_3)$ $\|x+y\| \le 2|x+y| \le 2(|x|+|y|) = 2|x|+2|y| = \|x\|+\|y\|$

old. $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}$ de bir norm fonk. dır.

---

(2) (b) $\|x\|=0 \Leftrightarrow \ln|x|=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\mp 1$ old Norm fonk. değildir.

---

(3) (a) $N_1)$ $\|x\|=0 \Leftrightarrow |x_1|=0 \Rightarrow x_1=0$ olup $x=0$ olmasını gerektirmez.

O halde $f(x)=|x_1|$ $\mathbb{R}^2$ de bir norm değildir.

(b) $g(x)=|x_1+x_2|$ $\quad \|x\|=0 \Leftrightarrow |x_1+x_2|=0 \Leftrightarrow x_1+x_2=0 \Leftrightarrow x_1=-x_2$

olup $x=0$ olmadığından; g, $\mathbb{R}^2$ de bir norm değildir.

---

(4) $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$ $\quad$ $N_1)$ $\|x\|_0=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_i=0 \Leftrightarrow \|x_i\|_i=0$

$\Leftrightarrow x_i=0 \Leftrightarrow x=0$

$N_2)$ $\|\alpha x\|_0 = \sum_{i=1}^{n}\|\alpha x_i\|_i = \sum_{i=1}^{n}|\alpha|.\|x_i\|_i = |\alpha|.\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_i = |\alpha|.\|x\|_0$

$N_3)$ $\|x_i+y_i\|_i \le \|x_i\|_i+\|y_i\|_i$ old. $\sum_{i=1}^{n}\|x_i+y_i\|_i \le \sum_{i=1}^{n}(\|x_i\|_i+\|y_i\|_i) =$

$= \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_i + \sum_{i=1}^{n}\|y_i\|_i$ olup;

$\|x+y\|_0 \le \|x\|_0+\|y\|_0$ dır. #

6 $C[0,1]$, $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$N_1)$ $\|f\|=0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)|\,dx = 0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow f=0$

$N_2)$ $\|\alpha f\| = \int_0^1 |\alpha f(x)|\,dx = \int_0^1 |\alpha|.|f(x)|\,dx = |\alpha|.\int_0^1 |f(x)|\,dx = |\alpha|.\|f\|$

$N_3)$ $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ olup;

$$\int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)\,dx = \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,dx \text{ old.}$$

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

---

10 $x \in L$ için $\|x\|'$ ve $\|x\|''$ denk iki norm olsun. O halde tanımdan,

$\|x\|'' \leq \alpha \|x\|'$ ol. şekilde $\alpha > 0$ sayısı vardır.

f dönüşümü $\|\cdot\|'$ normuna göre sürekli olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$\|x - x_0\|' < \delta$ old.

$\|f(x) - f(x_0)\|' < \varepsilon$ ol. şek. $\delta > 0$ sayısı vardır.

O halde her x için $\|x - x_0\|'' \leq \alpha \|x - x_0\|' < \alpha.\delta (= \delta)$

olacak şekilde $\alpha > 0$ vardır. Ayrıca;

$\|f(x) - f(x_0)\|'' \leq b.\|f(x) - f(x_0)\|' < \alpha\varepsilon < \varepsilon_1$

ol. şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. O halde f, $\|\cdot\|''$ normuna göre de süreklidir.

15 (α_n), $\mathbb{F}$ de skalar değerli bir dizi ve üstelik $\alpha_n \to \alpha$ olsun.

$\alpha_n x_n \to \alpha x$ old. göstereceğiz. O halde;

$$|\alpha_n x_n - \alpha x| = |\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x| \le |\alpha_n x_n - \alpha_n x| + |\alpha_n x - \alpha x|$$

$$\le |\alpha_n| \cdot |x_n - x| + |x| \cdot |\alpha_n - \alpha| \to 0 \quad \text{old.}$$

$\alpha_n x_n \to \alpha x$ dir.

İLAVE

Soru: $(X, \|\cdot\|)$ normlu lin. uz. $\begin{matrix} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_n + y_n \to x_0 + y_0 \\ \|x_n\| \to \|x_0\| \end{matrix}$

old. gösteriniz.

Çözüm: $x_n \to x_0$ ve $y_n \to y_0$ old. $\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve

$\|y_n - y_0\| < \varepsilon/2$ dir.

O halde $\|x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| = \|x_n - x_0 + y_n - y_0\| \le \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \le \varepsilon$

old. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ olur.

Ödev $(X, \|\cdot\|)$ $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x - y\|$

$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x - y\|$ old. $\big|\,\|x_n\| - \|x_0\|\,\big| \le \|x_n - x_0\| < \varepsilon$ olup

$\|x_n\| \to \|x_0\|$ elde edilir.

Ödev:

S/119

8

(1) Y alt Banach uzayı olsun. $Y=\overline{Y}$ old göstermeliyiz.

(a) $Y \subset \overline{Y}$ old. açıktır --- (I)

(b) $x \in \overline{Y}$ olsun. Bu takdirde Y de bulunan ve x e yakınsayan bir (x_n) dizisi mevcuttur. Y Banach uzayı old. $x \in Y$ dir. O halde $\overline{Y} \subset Y$ --- (II)

(I) ve (II) 'den $Y=\overline{Y}$

Tersine. Y, X de kapalı olsun. (x_n) Y de keyfi Cauchy dizisi olsun. $Y \subset X$ old. (x_n) X de bir Cauchy dizisidir. X Banach uzayı old. $x_n \to x (\in X)$ dır. Y, X de kapalı old. $x \in Y$ dir. O halde $x_n \to x (\in Y)$ old. Y alt Banach uzayıdır.

---

(3) $x \in [0,1]$ için $x=0 \Rightarrow f_n(x) \to f(x)=0$

$x=1 \Rightarrow f_n(x) \to f(x)=0$

$x \in (0,1) \Rightarrow f_n(x) \to f(x)=0$ old. $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) \to f(x)=0$ olur.

---

(4) $f_n(z)$ noktasal olarak $f(z)=2$ ye yakınsar. Gerçekten de $\forall \varepsilon>0$ sayısı için $\left|f_n(z)-f(z)\right| = \left|\cancel{2}+\frac{2z}{n}-2\right| = \left|\frac{2z}{n}\right| = 2\frac{|z|}{n} < \varepsilon$ olur.

$n > \frac{2|z|}{\varepsilon}$ dır. Dolayısıyla; $n_0 = \frac{2|z|}{\varepsilon}$ olarak alınırsa $\left|f_n(z)-f(z)\right|<\varepsilon$ olur. Ancak bu yakınsama düzgün değildir. Çünkü n_0 sayısı z ye de bağlı.

6) $\forall n$ için (f_n) fonk dizisi süreklidir. (f_n) fonk dizisi noktasal olarak;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \ x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonuna yakınsar.

Ancak $f(x)$ fonksiyonu sürekli olmadığından bu yakınsama düzgün değil.

7, 8, 3 kitap

---

11) $f_n(x) = n.\cos(n^2x)$ fonk. dizisini de alalım. Bu fonk dizisi verilen norma göre $f(x)=0$ fonksiyonuna yakınsar. Gerçekten de

$$\|f_n - f\| = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_0^1 |n.\cos(n^2x) - 0|\,dx$$

$$= \int_0^1 n.\cos(n^2x)\,dx = n\int_0^1 \cos(n^2x)\,dx = n.\left(\frac{1}{n^2}\sin(n^2x)\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sin(n^2) - \sin 0\right) \le \frac{1}{n} < \varepsilon$$

dur. Ancak (f_n) fonk. dizisi noktasal olarak yakınsak değildir. Örneğin; $x=1$ için $f_n(x) = n.\cos(n^2)$ fonk dizisi ıraksaktır. #

Ödev $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n+x^n}$, $x \ge 0$ fonk dizisinin düzg. yak?

5/29

S/131

(10)

(2) L bir lineer uzay $\|\cdot\|^1$ ve $\|\cdot\|^2$ denk normlar olsunlar. $x \in L$ için $\|x\|^1$ ve $\|x\|^2$ denk norm old. $\|x\|^2 \leq \alpha . \|x\|^1$ ol. şekilde α vardır.

(x_n) dizisi $\|\cdot\|^1$ normuna göre yakınsak yani $x_n \to x$ olsun.

Bu takdirde; $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\forall n \geq n_0$ old.

$\|x_n - x\|^1 < \varepsilon$ ol. şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde

(x_n) dizisi için $\|x_n - x\|^{11} \leq \alpha . \|x_n - x\|^1 < \alpha . \varepsilon$ yazabiliriz

Yani (x_n), $\|\cdot\|^2$ normuna göre de yakınsaktır.

---

(13) (X,d) kompakt metrik uzayı ~~...~~ olsun. O halde X deki $\forall (x_n)$ Cauchy dizisinin yakınsak bir (x_{n_i}) alt dizisi vardır. Şimdi (x_n), (X,d) metrik uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde;

$\forall m,n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dur. Cauchy dizileri yakınsak old.

(x_n) in (x_{n_i}) alt dizisi de yakınsaktır.

Kabul edelim ki $x_{n_i} \to x$ dir. İddia edelim ki $x_n \to x$ dir.

Gerçekten; $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \varepsilon$ olup $x_n \to x$ dir.

O halde (X,d) tam olur.

---

(7) $c\left(|\alpha_1| + |\alpha_2|\right) \leq \|\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)\| = \|(\alpha_1, \alpha_2)\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \Rightarrow$

$c \leq \dfrac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{(|\alpha_1| + |\alpha_2|)}$ dir.

(10) $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ denk iki norm ise bu normlardan birine göre açık olan küme, diğerine göre de açıktır. Topolojiler de açık kümeler vasıtasıyla tanımlandığından; denk iki ~~uzaklığı~~ norm, aynı topolojiyi verir.

* L, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ denk iki norm olsun. $\forall x \in L$ için

$$a\cdot\|x\|_1 \leq \|\cdot x\|_2 \leq b\cdot\|x\|_1 \quad \text{ol. şkl } a>0,\ b>0 \text{ vardır.}$$

$\|\cdot\|_1$ den elde edilen topoloji: τ_1

$\|\cdot\|_2$ " " " τ_2 olsun.

$\|\cdot\|_1$ normuna göre x in açık yuvarı $B_1(x)$

$\|\cdot\|_2$ " " x " " " $B_2(x)$ olsun

* $U \in \tau_1$ ve $p \in U$ olsun. $\|x\|_2 \leq b\cdot\|x\|_1$ den dolayı

$y \in B_1(x) \subset U$ açık yuvarı için $y \in B_2(x) \subset B_1(x) \subset U$

ol. şekilde $B_2(x)$ açık yuvarı vardır. Böylece $U = \bigcup\{B_2(x) : x \in U\}$

old. $U \in \tau_2$ olur.

* $V \in \tau_2$ ise $a\cdot\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ den dolayı benzer şekilde

$y \in B_1(x) \subset B_2(x) \subset V \Rightarrow V = \bigcup\{B_1(x) : x \in V\}$ ve

böylece $V \in \tau_1$ olur. Dolayısıyla $\tau_1 = \tau_2$ dir. Topolojiler aynı

11) $x \in L$ için $\|x\|$ ve $\|x\|^1$ denk norm old.

$$\|x\|^1 \leq \alpha . \|x\| \quad \alpha > 0 \text{ vardır}$$

(x_n) dizisi $\|.\|$ normuna göre yakınsak, yani $x_n \to x$ olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_0$ old. $\|x_n - x\| < \varepsilon$ ol. şek. $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde (x_n) dizisi için

$\|x_n - x\|^1 \leq \alpha . \|x_n - x\| < \alpha \varepsilon$ old. (x_n) $\|.\|^1$ normuna göre de yakınsaktır.

---

12) $x \in L$, $\|.\|$ ve $\|.\|^1$ denk old. $\|x\|^1 \leq \alpha . \|x\|$ $\alpha > 0$.

f - dönüşümü $\|.\|$ normuna göre sürekli olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde,

$\|x - x_0\| \leq \delta$ old.

$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ ol. şek. $\delta > 0$ vardır.

O halde $\forall x$ için $\|x - x_0\|^1 \leq \alpha . \|x - x_0\| < \alpha . \delta < \delta_1$ old.

$$\|f(x) - f(x_0)\|^1 \leq \alpha \|f(x) - f(x_0)\| < \alpha . \varepsilon < \varepsilon_1$$

ol. şek. $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. O halde f, $\|.\|^1$ normuna göre süreklidir.

Ödev

İLAVE

Eğer $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her mutlak yakınsak seri yakınsak ise, $(X, \|.\|)$ nın bir Banach uzayı old. gösteriniz.)