ALIŞTIRMALAR

Matrisler

1.) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^n \ (n \in \mathbb{Z}^+)$ yı tümevarımla elde ediniz.

Not: Her öğrenci, defterine çözümleriyle birlikte bu soruları yazmalıdır. Vize sonrası, bunula ilgili değerlendirme yapılacaktır.
N.Ş.

Çözüm: $n=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos(1)\theta & \sin(1)\theta \\ -\sin(1)\theta & \cos(1)\theta \end{bmatrix}$ dır.

$n=2$ ~~için~~ için doğru olduğunu gösterelim.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta.\cos\theta - \sin\theta\sin\theta & 2\cos\theta.\sin\theta \\ -2.\sin\theta.\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

$n=k$ için doğru old kabul edelim. $A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$ olsun

$n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim. $A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$

$$A^k \cdot A^1 = A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta.\sin\theta & \cos k\theta \sin\theta + \sin k\theta.\cos\theta \\ -\sin k\theta.\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta.\sin\theta + \cos k\theta.\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k\theta+\theta) & \sin(k\theta+\theta) \\ -\sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \#$$

2-] $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ olsun. $AB=BA$ eşitliğini sağlayan, sıfır matris ve birim matristen farklı matrislerin varlığını araştırınız.

Çözüm

$B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. $AB=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3a+5c & 3b+5d \\ 5a+3c & 5b+3d \end{bmatrix}$

$B.A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3a+5b & 5a+3b \\ 3c+5d & 5c+3d \end{bmatrix}$

$AB=BA$ eşitliğinin sağlanması için

$3a+5c=3a+5b \Rightarrow b=c$

$5a+3c=3c+5d \Rightarrow a=d$

$3b+5d=5a+3b \Rightarrow a=d$

$5b+3d=5c+3d \Rightarrow b=c$

buradan $B=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ elde edilir. Örneğin $a=2$, $b=4$ ise $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ olur.

3-] $A=\begin{bmatrix} 1 & r & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. $A.B^T=0$ eşitliğini sağlayan r-sayısını bulunuz.

4-] $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ eşitliğini gerçekleyen A matrisini bulunuz.

5-] $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dır. $AX=rX$ eşitliğini sağlayan r sayısını bulun?

6.) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A.B$ yi altmatrislere ayırma yolu ile elde ediniz.

7-] $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$ verildiğinde, eğer mevcutsa A^{-1}'i elde ediniz.

8-] Bir A kare matrisin tersini bulmak için izlenecek yollardan biri de şu idi. A kare matrisi ve hemen yanına A nın boyutunda olan I birim matrisi yazılır. A kare matrisi elementer satır işlemleriyle adım adım birim matrise dönüştürülürken, aynı elementer işlemler hemen yanındaki birim matrisede uygulanır. Sonuç olarak; A matrisi birim matrise dönüştüğünde yanındaki birim matriste A^{-1} e dönüşür.

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ verilsin. A^{-1}'i yukarıdaki yöntemle elde ediniz. Elementer işlemleri yazınız.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right] \overset{\varepsilon_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right] \overset{\varepsilon_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 5 & -1 & 2\end{array}\right]$$

$$\overset{\varepsilon_3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1-\frac{1}{5} & -1+\frac{2}{5}\\ 0 & 5 & -1 & 2\end{array}\right] \overset{\varepsilon_4}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4/5 & -3/5\\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5\end{array}\right] \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}4/5 & -3/5\\ -1/5 & 2/5\end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1: S_1: S_1-S_2$ $\quad \varepsilon_2: S_2: S_2-S_1$ $\quad \varepsilon_3: S_1: S_1+\frac{S_2}{5}$ $\quad \varepsilon_4: S_2: \frac{S_2}{5}$

9-] $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow$ yukarıdaki metotla A^{-1}'i bulunuz. Elementer işlemleri yazınız.

10-] $A=\begin{bmatrix}1 & 2+i\\ 3-i & 4+3i\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}2+3i & 5-i\\ 4 & 6+7i\end{bmatrix} \Rightarrow (\bar{A})^T=\overline{A^T}$ olduğunu göst.

$a_{ij}\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$A=[a_{ij}] \Rightarrow \bar{A}=[\bar{a}_{ij}]$

$a=2+3i \Rightarrow \bar{a}=2-3i$

4

11-) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ olmak üzere; $AX=B$ lin. sis. çözümünü bulmak için;

sistemin her iki yanını soldan A^{-1} ile çarpmak yeterlidir.

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=I_nX=X=A^{-1}B$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=5\\ x+4x_2&=7\end{aligned}\right\}$$ lin. denk sis. çözümünü bulunuz.

$A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$, $AX=B$. $A^{-1}=\begin{bmatrix}4/5&-\frac{3}{5}\\-1/5&2/5\end{bmatrix}$ old. önceden

elde etmiştik. Öyleyse; $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}4/5&-3/5\\-1/5&2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/5\\9/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

12-) $$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=6\\ 2x_1-x_2+x_3&=1\\ x_1+x_2-x_3&=2\end{aligned}\right\}$$ lin. denk. sisteminin çözümünü, önce A^{-1}'i, 8. sorudaki şekilde bulup, sonrasından, yukarıdaki metodu uygulayarak bulunuz.

13-) Aşağıda genişletilmiş matrisleri verilen lin. denk. sistemlerinin çözümlerini varsa, bulunuz.

$A=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&0&1&5\\1&2&3&3\end{array}\right]$ $B=\left[\begin{array}{cc|c}1&5&12\\2&3&10\end{array}\right]$ $C=\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&9\\1&2&1&4\\1&-1&2&3\end{array}\right]$

14-) $$\left.\begin{aligned} x+2y-3z&=a\\ 2x+3y+3z&=b\\ 5x+9y-6z&=c\end{aligned}\right\}$$ lin. denk. sisteminin çözümünün olabilmesi için a,b,c arasındaki ilişkiyi bulunuz $(3a+b=c)$

15-] $AX=B$ lin. sisteminin genişletilmiş matrisi $[A \mid B]$ olsun. $[A \mid B]$ matrisi satır basamak formuna indirgendiğinde $AX=B$ lineer sistemi, her denklemi bir öncekinden bir az bilinmeyen içeren ve $AX=B$ lin. sist. denk olan bir lin. sisteme dönüşür. $AX=B$ lin. sistemine denk olan, bir başka değişle $AX=B$ lineer sistemi ile aynı çözüme sahip bulunan bu yeni lineer denk sisteminin çözümünü bulmak $AX=B$ lin. sis. çözümünü bulmaktan çok daha kolaydır.

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=3\\ 2x_1-x_2+5x_3&=1\\ 4x_1+3x_2-x_3&=7\end{aligned}\right\}$$

lin. denk sisteminin çözümünü araştıralım:

$$[A \mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3\\ 2 & -1 & 5 & 1\\ 4 & 3 & -1 & 7\end{array}\right]$$

matrisini satır basamak formuna dönüştürelim:

$$\overset{\varepsilon_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3\\ 0 & -5 & -1 & -5\\ 0 & -5 & -13 & -5\end{array}\right]\overset{\varepsilon_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1/5 & 1\\ 0 & -5 & -13 & -5\end{array}\right]\overset{\varepsilon_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1/5 & 1\\ 0 & 0 & -12 & 0\end{array}\right]\overset{\varepsilon_4}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1/5 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

$\varepsilon_1: S_2: -2S_1+S_2$
$\quad S_3: -4S_1+S_3$

$\varepsilon_2: S_2: \dfrac{S_2}{-5}$

$\varepsilon_3: S_3: 5S_2+S_3$

$\varepsilon_4: S_3: \dfrac{S_3}{-12}$

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=3\\ x_2+\tfrac{1}{5}x_3&=1\\ x_3&=0\end{aligned}\right\}$$

$x_3=0$

$x_2+\frac{1}{5}x_3=1 \Rightarrow x_2=1$

$x_1+2.1+3.0=3 \Rightarrow x_1=1$

16-] $$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2+4x_3&=8\\ x_1+2x_2+3x_3&=1\\ 2x_1-x_2+x_3&=7\end{aligned}\right\}$$

lin. denk. sistemini, genişletilmiş matrisini basamak formuna indirgeyerek çözünüz.

17.) $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 16 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$ Lineer sistemin genişletilmiş matrisini satır basamak formuna indirgeyerek çözünüz.

18.) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 2x_4 + x_5 &= 16 \end{aligned}$$ an ?

19.) $$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 3y + 3z &= b \\ 5x + 9y - 6z &= c \end{aligned}$$ Lin. denk sisteminin çözümünün olması için; a, b ve c nin arasında gerçeklenmesi gereken bağıntıyı bulunuz.

20.) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2-5)x_3 &= a \end{aligned}$$ Lin. denk. sisteminin a nın hangi değerleri için

i.) çözümlerinin olmadığını

ii.) sonsuz adet çözüm olduğunu

iii.) bir tek çözümünün old. belirleyiniz.

21) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + (a^2-8)x_2 &= a \end{aligned}$$ 4

22.) $$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y + z &= 2 \\ x + z &= 2 \\ ax + by + cz &= 0 \end{aligned}$$ Lin. denk. sisteminin

a.) bir tek çözümünün olması

b.) çözümünün olmaması,

c.) sonsuz sayıda çözümünün olması için a, b, c ?

d.) Tek çözümünün $x=1$, $y=1$, $z=1$ old gösteriniz.

23-) m denklem, n bilinmeyenli * lin. denk sistemi, $AX=B$ de

$B=0 \Rightarrow$ homojendir. $X=0$, ın sistemin her zaman bir çözümüdür. (aşikar çözüm)

$n>m \Rightarrow$ Sistemin aşikar çözümden başka çözümleri de vardır.

Bu çözümleri bulmak için $n-m$ adet bilinmeyene keyfi değerler verilir ve geri kalan m adet bilinmeyen bu $n-m$ adet bilinmeyene verilen değerler cinsinden bulunur.

i) Sistemin genişletilmiş matrisi satır basamak formuna dönüştürülür.

ii) En alt satırdan başlayarak ve $n-m$ adet bilinmeyene keyfi değerler vererek çözüm yukarı satırlara doğru satır-satır geliştirilir.

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+3x_4&=0\\ 2x_1+5x_2+4x_3+7x_4&=0\\ 2x_1+5x_2+5x_3+7x_4&=0 \end{aligned}\right\}$$ lin. homojen denk. sis. çözünüz.

Sistemin aşikar olmayan çözümlerini bulmak için sistemin

$$[A\,|\,0]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&0\\ 2&5&4&7&0\\ 2&5&5&7&0 \end{array}\right]$$

ile belirlenen ilaveli (genişletilmiş) matrisini satır basamak formuna dönüştürelim.

E_1: $S_2: -2S_1+S_2$ $\quad$ E_2: $S_3: S_3-S_2$

$S_3: -2S_1+S_3$

$$\overset{E_1}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&0\\ 0&1&2&1&0\\ 0&1&3&1&0 \end{array}\right] \overset{E_2}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&0\\ 0&1&2&1&0\\ 0&0&1&0&0 \end{array}\right]$$

Son satırından;

$0x_1+0x_2+x_3+0.x_4=0 \Rightarrow x_3=0$

$0x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \Rightarrow x_2+x_4=0$

$x_2=-x_4$

$x_4=r$ olsun. $x_2=-r$ olacaktır $x_1+2x_2+x_3+7x_4=0$ 'dan da $x_1=-r$ elde edilir

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-r\\-r\\0\\r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}r \quad \#$$

24-) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere; $AX=0$ lin. hom. sisteminin ancak ve ancak $ad-bc\neq 0$ olması halinde bir tek çözümünün $x_1=x_2=0$ old. gösterin. $ad-bc=0 \Rightarrow$ sistemin sonsuz çözümünün old. gösteriniz.

25-) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -2 & t & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$ $\det(A)=?$ $\det(B)=?$

$\det A=\det B$ denklemi bir çözüme sahip midir?

26-) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \lambda^n & n.\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ eşitliğinin doğru old. gösteriniz.

27) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{45}=?$

28-) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ verilsin. $A^n=\begin{bmatrix} 64 & 64 \\ 64 & 64 \end{bmatrix} \Rightarrow n=?$

29-) f, 2. mertebeden matrisler kümesinde tanımlı bir fonksiyon ve $f(x)=x^7-x-3I_2$ olsun. $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(A)=?$

30-) $\left.\begin{aligned} x+my+z&=m \\ (m+1)x+y-mz&=1 \\ 4x-3y-z&=3 \end{aligned}\right\}$ lin. denk. sis. çözümünü m ye göre irdeleyiniz.