KOMPLEKS İNTEGRAL

1. Reel Değişkenli, Kompleks Değerli Fonksiyonların İntegrali

Kompleks fonksiyonlar için belirsiz integral kavramı, reel değişkenli benzerleriyle tamamen aynıdır.

Reel analizdeki;

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

belirli (veya Riemann) integrali, (kompleks düzlemdeki bir eğri üzerinde tanımlı bir kompleks fonksiyonun eğrisel integrali ile) kompleks analize aktarılabilir. Bu düzlemdeki iki değişkenli reel fonksiyonların eğrisel integrali ile benzerdir.

Bir kompleks fonksiyonun eğrisel (çevre) integralini vermeden önce reel değişkenli ve kompleks değerli bir $f:[a,b]\subseteq \mathbb{R}\rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun integralinin tanımını vererek başlayalım.

$u(t)$ ve $v(t)$, $(a\leq t\leq b)$ reel değerli fonksiyonlar ve $f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$ $(a\leq t\leq b)$ kompleks değerli fonksiyon olsun. Analizden bilindiği üzere; u ve v fonksiyonları sürekli fonksiyonlar ise u ile v integrallenebilirdir. Dolayısıyla f sürekli ise f nin belirli integralini:

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\cdot\int_a^b v(t)\,dt \quad \cdots (1)$$

olarak tanımlayabiliriz. Sağtaraftaki belirli integraller bulunarak bu integral hesaplanabilir. Yani; $U'(t)=u(t)$ ve $V'(t)=v(t)$ ise

$$\int_a^b f(t)\,dt=\left[U(b)-U(a)\right]+i\cdot\left[V(b)-V(a)\right] \quad \cdots (2)$$

dır.

Ör. $\int_0^1 (3t-i)^2\,dt$, belirli integralini hesaplayınız.

Çözüm: $f(t)=(3t-i)^2=9t^2-6ti-1=9t^2-1-6ti=u(t)+iv(t)$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 u(t)\,dt+i\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1 (9t^2-1)\,dt+i\int_0^1 (-6t)\,dt$$

$$=(3t^3-t)\Big|_0^1+i\,(-3t^2)\Big|_0^1$$

$$=(2-0)+i\cdot(-3-0)$$

$$=2-3i \;\#$$

$f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$, $g(t)=p(t)+iq(t)$ $(a\leq t\leq b)$ fonksiyonları sürekli olsunlar.

Bu taktirde;

$$\text{(i)}\quad \int_a^b [f(t)+g(t)]\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \qquad (3)$$

$$\text{(ii)}\quad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \,, \quad a\leq c\leq b \qquad (4)$$

$$\text{(iii)}\quad \int_a^b (c+id)\cdot f(t)\,dt = (c+id)\int_a^b f(t)\,dt \qquad (5)$$

$$\text{(iv)}\quad \int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt \qquad (6)$$

$$\text{(v)}\quad \int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt = \int_a^b [u(t)p(t)-v(t)q(t)]\,dt + i\cdot\int_a^b [u(t)q(t)+v(t)p(t)]\,dt \qquad (7)$$

integral hesabın temel teoreminin $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu için kompleks benzerini verelim.

Kabul edelim ki; u ve v fonksiyonları $a<t<b$ aralığında dif-bilir ve $F(t)=U(t)+iV(t)$ olsun. $F'(t)+U'(t)+iV'(t)$ dir. $F'(t)=f(t)$ ise (2) denklemi

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

olur.

Ör. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} t\cdot e^{it}\,dt$, belirli integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_0^{\pi/4} t\cdot e^{it}\,dt = t\cdot\sin t\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\sin t\,dt + i\left(-t\cdot\cos t\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\cos t\,dt\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0^\circ\right) + i\left[\left(-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) + i\left(-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

(a) $\displaystyle\int_0^1 (t+2i)^3\,dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cosh(it)\,dt$ (c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{t+i}\,dt$

Çözüm:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (t+2i)^3 d = \int_0^1 (t^3-12t)\,dt + i\cdot\int_0^1 (6t^2-8)\,dt = \frac{t^4}{4}-6t^2\Big]_0^1 + i\,\left(2t^3-8t\right)\Big]_0^1 = (1/4-6)+i(2-8)$

$\displaystyle = -\frac{23}{4}-6i$ #

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cosh(it)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \sin t\Big]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2}-\sin 0^\circ = 1$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{t+i}\,dt = \int_0^2 \left(1-\frac{i}{t+i}\right)dt = t\Big]_0^2 - i\cdot \ln|t+i|\Big]_0^2 = 2-i\cdot\left(\ln|2+i|-\ln|i|\right)$

2. m ve n tamsayı olsun.

$$\int_0^{2\pi} e^{imt}\cdot e^{-int}\,dt = \begin{cases} 0 & , \ m\neq n \\ 2\pi & , \ m=n \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\displaystyle m\neq n \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{imt}\cdot e^{-int}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{(m-n)ti}\,dt = \frac{1}{i(m-n)}\, e^{(m-n)ti}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{i(m-n)}\left(e^{(m-n)2\pi i}-e^0\right) = 0$#

$\displaystyle m=n \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{imt}\cdot e^{-int}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{imt-int}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$ #

3. $\text{Re}\, z > 0$ için;

$$\int_0^{\infty} e^{-zt}\, dt = \frac{1}{z}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $$\int_0^{\infty} e^{-zt}\, dt = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R e^{-zt}\, dt\right) = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{z} e^{-zt}\Big|_0^R\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{e^{Rt}} + \frac{1}{z}\cdot e^{0}\right) = \frac{1}{z} \;\#$$

4. u ile v diferansiyellenebilen fonksiyonları için $f(t) = u(t) + i\, v(t)$ olsun.

$$\int_a^b f(t)\cdot f'(t)\, dt = \frac{1}{2}[f(b)]^2 - \frac{1}{2}[f(a)]^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: u ve v fonksiyonları dif-bilir olduğundan $f(t) = u(t) + i v(t)$ fonksiyonu da dif-bilir dir ve;

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) \Rightarrow df(t) = f'(t)\, dt$$

dir. Dolayısıyla;

$$\int_a^b f(t)\cdot f'(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, d[f(t)] = \frac{1}{2}[f(t)]^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}[f(b)]^2 - \frac{1}{2}[f(a)]^2 \;\#$$

dir.

2. Çevreler ve Çevre İntegralleri

Düzlemde bir C eğrisi (çevre) ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere kompleks değişkenli ve kompleks değerli f fonksiyonu verildiğinde;

$$\int_C f(z)\,dz$$

integralinin nasıl hesaplanacağını görelim.

Tanım: Düzlemde bir C eğrisi verilmiş olsun. Böyle bir eğri

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

parametrik denklemleri ile verilebilir. Burada $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leq t \leq b)$ aralığında süreklidir. Eğer $(a \leq t \leq b)$ için $x(t)$ ve $y(t)$ nin her ikiside dif-bilirse C eğrisine diferansiyellenebilirdir denir.

Not: Aralığın uç noktalarında $x(t)$ ve $y(t)$ nin tek taraflı türevlerinin varlığı yeterlidir.

Not: $C: z(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$ eğrisinin t ye göre türevi $z'(t)$ ile gösterilir ve;

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

ile tanımlanır.

Tanım: $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ $(a \leq t \leq b)$ türev fonksiyonunda; $x'(t)$ ve $y'(t)$ sürekli ve $[a,b]$ üzerinde aynı anda ikiside sıfır değilse C eğrisine düzgündür denir.

Eğer C düzgün eğriyse her bir $z(t)$ noktasında $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ vektörüyle verilen, sıfırdan farklı teğet vektörüne sahiptir.

Eğer $x'(t_0) = 0$ ise teğet vektörü olan $z'(t_0) = i\,y'(t_0)$, x-eksenine paraleldir.

Eğer $x'(t_0) = 0$ ise $z(t_0)$ noktasında C ye teğet olan doğrunun dy/dx eğimi $y'(t_0)/x'(t_0)$ ile verilir. Böylece $z'(t)$ teğet vektörünün $\theta(t)$ değişim açısı t nin bütün değerleri için tanımlıdır ve

$$\theta(t) = \arg(z'(t)) = \arg(x'(t) + iy'(t))$$

ile verilen sürekli bir fonksiyondur. Bu durumda $x^1(t)\vec{i} + y^1(t)\vec{j}$ vektörü, her bir noktada eğriye sürekli teğettir.

* Basitçe düzgün eğri köşe noktaları olmayan eğridir.

Not: Eğer C düzgün eğriyse, yay uzunluğunun diferansiyeli olan ds,

$$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=|z'(t)|\,dt$$

ile verilir.

$x'(t)$ ile $y'(t)$ sürekli fonksiyonlar olduğundan $[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{1/2}$ fonksiyonu da süreklidir ve C eğrisinin uzunluğu,

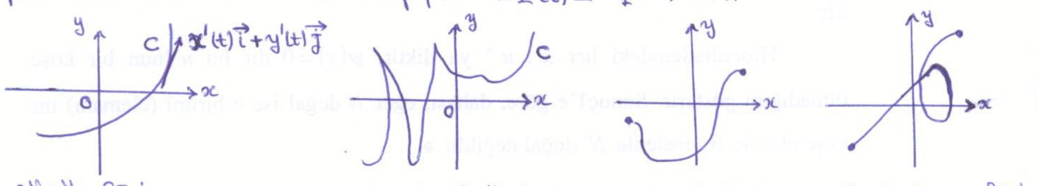
$$L=\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=\int_a^b |z'(t)|\,dt$$

belirli integraliyle verilir.

Not: C eğrisinin parametrik denklemi, $C: z_1(t)=x_1(t)+iy_1(t)$ $(a\leq t\leq b)$ olsun. C nin ters yönündeki eğriyi $(-C)$ ile gösterirsek,

$$(-C):\ z_2(t)=x_1(-t)+iy_1(-t)\quad (-b\leq t\leq -a)$$

parametrik denklemine sahiptir. $z_2(t)=z_1(-t)$ dir.



Düzgün Eğri — Parçalı Düzgün Eğri — Basit Eğri — Basit Olmayan Eğri

Tanım: Eğer $x'(t)$ ve $y'(t)$; ($[a,b]$ nin sonlu sayıdaki noktası hariç) sürekli fonksiyonlar ise C ye parçalı Düzgündür denir. Parçalı Düzgün eğriye çevre veya yol da denir.

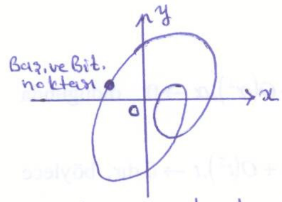
Bir parçalı düzgün eğri, sonlu sayıda düzgün eğri parçalarına bölünebilir. Bu şekilde $C_1, C_2, \dots, C_n$ düzgün eğrileri için C çevresi

$$C=C_1+C_2+\dots+C_n$$

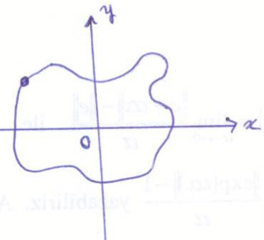
ile ifade edilir. Düzgünlüğün bozulduğu sonlu noktalarda teğet vektörüne sahip değildir.

Tanım: Düzlemde kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri denir. Eğer eğrinin parametrik denklemi $z(t)=x(t)+iy(t)$ $(a\leq t\leq b)$ ise basit eğri olması durumunda $z_1(t_1)=z(t_2)$ olacak şekilde, farklı t_1 ve t_2 parametreler yoktur denmektir.

Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olduğu için kapalı eğri basit eğri değildir. Yani $a \neq b$ için $z(a)=z(b)$ dir. t_1 ve t_2 noktaları $(a,b]$ aralığında farklı olduğunda $z(t_1) \neq z(t_2)$ ise basit kapalı eğri olarak adlandırmayacağız. Yani basit eğri, başlangıç ve bitiş noktaları hariç kendi kendisini kesmeyen eğridir.



Basit olmayan kapalı eğri



Basit Kapalı Eğri

Tanım (Kompleks Fonksiyonun integrali):

Kompleks f fonksiyonunun, denklemi $z(t)=x(t)+iy(t)$ olarak verilen C eğrisi üzerinde tanımlı olduğunu kabul edelim. t nin değişim aralığı olan $[a,b]$ yi $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n=b$ olarak alt aralıklara bölelim. $z(t_j)=z_j$ olsun. $z_0=x(a)+iy(a)$, $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, $z_n=x(b)+iy(b)$ eğri üzerindeki noktalardır. Her bir $[t_{j-1}, t_j]$ alt aralığında bir ξ_j noktası seçelim. $w_j=z(\xi_j)$ noktası, C üzerindeki z_{j-1} ile z_j noktaları arasındadır.

$$\sum_{j=1}^{n} f(w_j)(-z_{j-1}+z_j) \dots (*)$$

toplamını oluşturalım. Her bir $|t_j - t_{j-1}| \to 0$ iken $n \to \infty$ için limit alalım. Eğer $(*)$ daki toplam bir L sayısına yakınsarsa, L ye C üzerinde f nin eğrisel integrali veya çevre integrali adı verilir ve

$$\int_C f(z)\,dz$$

ile gösterilir. Yani;

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(w_j)(z_j - z_{j-1})$$

dir.

Teorem: Eğer C parçalı düzgün bir eğri ve C üzerinde f sürekli ise

$$\int_C f(z)\,dz$$

integrali vardır.

Teorem: C düzgün eğrisi, $z=z(t)$, $(a\le t\le b)$ parametrik denklemleriyle verilsin. ve f fonksiyonu C eğrisini ihtiva eden bir küme üzerinde tanımlı, sürekli ve kompleks değerli olsun. Bu durumda

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$$

dir. Eğer C eğrisi parçalı düzgün ise sonlu sayıdaki düzgün parçaları üzerindeki integrallerin toplamı alınır.

Not: C eğrisinin iki parametrik gösterimi;

$$C:\ z_1(t)=x_1(t)+iy_1(t) \qquad (a\le t\le b)$$

$$C:\ z_2(t)=x_2(\tau)+iy_2(\tau) \qquad (\alpha\le\tau\le\beta)$$

ise $\alpha=\Phi(a)$, $\beta=\Phi(b)$ ve $\Phi'(t)>0$ $(a<t<b)$ olacak şekilde dif-bilir bir $\tau=\Phi(t)$ fonksiyonu varsa bu taktirde $z_2(\tau)$ ya C nin yeni parametrik gösterimi denir. Eğer f, C üzerinde sürekli ise

$$\int_a^b f(z_1(t))\,z_1'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(z_2(\tau))\cdot z_2'(\tau)\,d\tau$$

dur. Yani C nin parametrik gösteriminin değişmesi integralin değerini değiştirmez

Teorem: C parçalı düzgün eğri ve $\int_C f(z)dz$ ve $\int_C g(z)\,dz$ integralleri mevcut olsun.

(i) $\int_C [f(z)+g(z)]dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)dz$

(ii) $\alpha\in\mathbb{C}$ için $\int_C \alpha f(z)dz = \alpha\int_C f(z)\,dz$

(iii) $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)dz$ (Burada $-C$, C 'nin ters yönlendirilmişidir.)

(iv) $C=C_1+C_2$ ise $\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$ dir.

Teorem: $f=u+iv$ fonksiyonu düzgün C eğrisi üzerinde sürekli olsun.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\cdot\int_C (v\,dx + u\,dy)$$

dir.

Tanım: Düzlemdeki açık ve bağlantılı bir kümeye bölge denir. Eğer bir D bölgesindeki her basit kapalı C eğrisi yalnızca D deki noktaları kapsarsa, yani C eğrisinin içi D de kalıyorsa D'ye basit bağlantılı bölge denilir.

Basit bağlantılı olmayan bölgeye çoklu bağlantılı bölge denir.

Teorem: D basit bağlantılı bir bölge ve F fonksiyonu D içinde analitik, $\forall z\in D$ için $F'(z)=f(z)$ olsun. C eğrisi olarak z_1 de başlayıp, z_2 de biten D içindeki parçalı düzgün bir eğri alalım. Bu durumda

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1)$$

dir. Özel olarak C kapalı eğri ise $\int_C f(z)\,dz=0$ dır.

Teorem: Bir f fonksiyonu, parçalı düzgün bir C eğrisi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda;

(i) $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|z'(t)|\,dt$ dir.

(ii) C nin çevresi L ve C üzerindeki her z için $|f(z)|\le M$ ise

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le M\cdot L$$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integrallerde $\int_C f(z)\,dz$ yi hesaplayınız.

1. $f(z)=z^2-iz$, C; 2 den $2i$ ye pozitif yönde orijin merkezli dörtte bir çember.

Çözüm: $z(t)=2e^{it}$, $0\le t\le \pi/2$ olarak alalım. Bu durumda;

$f(z(t))=4e^{2ti}-2e^{it}i$ ve $dz=2ie^{it}dt$ $\quad 0\le t\le \pi/2$

$$\Rightarrow \int_C (z^2-iz)\,dz=\int_0^{\pi/2}(4e^{2ti}-2e^{it}i)\cdot 2ie^{it}\,dt=\int_0^{\pi/2}(8e^{3ti}i+4e^{2ti})\,dt$$

$$=8i\int_0^{\pi/2}e^{3ti}\,dt+4\int_0^{\pi/2}e^{2ti}\,dt=\frac{8}{3}e^{3ti}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{2}{i}e^{2ti}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{8}{3}\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}-1\right)-2i\left(e^{\pi i}-1\right)=\frac{8}{3}(-i-1)-2i(-1-1)$$

$$=-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}i \;\#$$

2. $f(z)=1$, $z(t)=t^2-it$ $\quad (1\le t\le 3)$

Çözüm: $f(z(t))=1$, $z(t)=t^2-it \Rightarrow dz=(2t-i)\,dt$ $\quad (1\le t\le 3)$

$$\Rightarrow \int_C dz=\int_1^3(2t-i)\,dt=(t^2-it)\Big|_1^3=(9-3i)-(1-i)=8-2i \;\#$$

3. $f(z)=\mathrm{Re}\,z$, C; 1 noktasını $(2+i)$ ye birleştiren doğru parçası

Çözüm: C; (1,0) noktasını (2,1) noktasına birleştiren doğru parçası olduğundan $z=x+iy$ olmak üzere;

$\frac{x-1}{1-2}=\frac{y-0}{0-1}\Rightarrow y=x-1$ elde edilir. $x=t$ $(1\le t\le 2)$ alınırsa

$y=t-1$ olur ve böylece; $z(t)=t+i(t-1)$ $(1\le t\le 2)$ elde edilir.

Buradan; $f(z(t))=t$ ve $z(t)=t+i(t-1)\Rightarrow dz=(1+i)\,dt$ bulunur. Dolayısıyla

$$\int_C x\,dz=\int_1^2 t\cdot(1+i)\,dt=(1+i)\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_1^2=\frac{1+i}{2}(4-1)=\frac{3+3i}{2}\;\#$$

4. $f(z)=\frac{1}{z}$, C; 4i den -4i ye pozitif yönde orijin merkezli 4 yarıçaplı yarım çember.

Çözüm: $z(t)=4.e^{it}$ $(\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2)$ olarak alınırsa; $f(z(t))=\frac{1}{4}e^{-it}$ ve $dz=4ie^{it}dt$ bulunur. Buradan;

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{4}.e^{-it}.4i.e^{it}\,dt = i.t\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \pi i \ \#$$

5. $f(z)=z-1$; C; (2i) den (1-4i) ye herhangi bir parçalı düzgün eğri.

Çözüm: $F(z)=\frac{(z-1)^2}{2}$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=z-1$ dir. Dolayısıyla

$$\int_C (z-1)\,dz = F(1-4i)-F(2i) = \frac{(-4i)^2}{2} - \frac{(2i-1)^2}{2} = \frac{-13+4i}{2} \ \#$$

6. $f(z)=iz^2$, C; (1+2i) noktasını (3+i) ye birleştiren doğru parçası.

Çözüm: $F(z)=\frac{iz^3}{3}$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=iz^2$ dir. Dolayısıyla;

$$\int_C iz^2\,dz = F(3+i)-F(1+2i) = \frac{i}{3}\left[(3+i)^3-(1+2i)^3\right] = \frac{i}{3}\left[18+26i-11-2i\right] = \frac{i}{3}\left[7+24i\right]$$
$$= \frac{-24+7i}{3} \ \#$$

7. $f(z)=\sin(2z)$, C; (-i) noktasını (-4i) ye birleştiren doğru parçası.

Çözüm: $F(z)=-\frac{1}{2}\cos(2z)$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=\sin(2z)$ dir. Dolayısıyla;

$$\int_C \sin(2z)\,dz = F(-4i)-F(-i) = -\frac{1}{2}\left[\cos[2(-4i)]-\cos[2(-i)]\right] = -\frac{1}{2}\left(\cos(8i)-\cos(2i)\right) \ \#$$

8. $f(z)=1+z^2$, C; pozitif yönde (-3) den (3i) ye orijin merkezli 3 yarıçaplı çemberin parçası.

Çözüm: $F(z)=z+\frac{z^3}{3}$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=1+z^2$ dir. Dolayısıyla;

$$\int_C (1+z^2)\,dz = F(3i)-F(-3) = \left[3i+\frac{(3i)^3}{3}\right]-\left[(-3)+\frac{(-3)^3}{3}\right] = -6i+12 \ \#$$

9. $f(z)=-i\cdot\cos(z)$, C; 0 dan $-2+i$ ye herhangi bir parçalı düzgün eğri.

Çözüm: $F(z)=-i\sin(z)$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=-i\cos(z)$ dir. Dolayısıyla

$$\int_C (-i\cos(z))\,dz = F(-2+i)-F(0) = -i\cdot\sin(-2+i) \ \#$$

10. $f(z)=|z|^2$, C; -4 noktasını i ye birleştiren doğru parçası.

Çözüm: $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ $(z=x+iy)$ dir. C; $(-4,0)$ noktasını $(0,1)$ noktasına birleştiren doğru parçası olduğundan;

$$\frac{x+4}{-4-0}=\frac{y-0}{0-1} \Rightarrow x+4=4y \Rightarrow x=4y-4$$

bulunur. $x=4y-4$ denkleminde $y=t$ $(0\le t\le 1)$ alınırsa $x=4t-4$ olur.

Dolayısıyla; $z(t)=(4t-4)+i\cdot t$ $(0\le t\le 1)$, $dz=(4+i)\,dt$ ve

$f(z(t))=(4t-4)^2+t^2$ bulunur. Böylece;

$$\int_C |z|^2\,dz = \int_0^1 (17t^2-32t+16)\cdot(4+i)\,dt = (4+i)\left[\frac{17}{3}t^3-16t^2+16t\right]\Big|_0^1 = \frac{17}{3}(4+i) \ \#$$

11. $f(z)=(z-i)^3$, C; $z(t)=t-it^2$ $(1\le t\le 2)$

Çözüm: $f(z(t))=(t-i(1+t^2))^3$ ve $dz=(1-2ti)\,dt$

$$\Rightarrow \int_C (z-i)^3\,dz = \int_1^2 [t-(1+t^2)i]^3\cdot(1-2ti)\,dt \left\{\begin{array}{l} t-(1+t^2)i=u \\ (1-2ti)\,dt=du \end{array}\right\} = \int_{1-2i}^{2-5i} u^3\,du = \frac{1}{4}u^4\Big|_{1-2i}^{2-5i}$$

$$=\frac{1}{4}\left[(2-5i)^4-(1-2i)^4\right] \ \#$$

12. $f(z)=e^{iz}$, C; -2 den $-4-i$ ye herhangi bir parçalı düzgün eğri.

Çözüm: $F(z)=\frac{1}{i}e^{iz}$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=e^{iz}$ dir. Dolayısıyla

$$\int_C e^{iz}\,dz = F(-4-i)-F(-2) = -i\left[e^{i(-4-i)}-e^{i(-2)}\right] = -i\left(e^{1-4i}-e^{-2i}\right) \ \#$$

13. $f(z)=\sinh z$, C; $x^2+\frac{1}{2}y^2=8$ elipsinin $-4i$ den $2\sqrt{2}$ ye olan parçası.

Çözüm: $F(z)=\cosh z$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=\sinh z$ dir. Dolayısıyla;

$$\int_C \sinh z\,dz = F(2\sqrt{2})-F(-4i)=\cosh(2\sqrt{2})-\cosh(-4i)$$
$$=\cosh(2\sqrt{2})-\cosh(4i)\ \#$$

14. $f(z)=i\bar{z}$, C; 0 ile $-4+3i$ arasındaki doğru parçası.

Çözüm: C; $(0,0)$ noktasını $(-4,3)$ noktasına birleştiren doğru parçası olduğundan;

$$\frac{x-0}{0-(-4)}=\frac{y-0}{0-3} \Rightarrow x=-\frac{4}{3}y$$

elde edilir. $x=-\frac{4}{3}y$ de $y=t$ $(0\le t\le 3)$ yazılırsa $x=-\frac{4}{3}t$ elde edilir.

Dolayısıyla; $z(t)=-\frac{4}{3}t+it$ $(0\le t\le 3)$ olarak bulunur. Böylece; $f(z(t))=t-\frac{4}{3}ti$ ve $dz=\left(-\frac{4}{3}+i\right)dt$ $(0\le t\le 3)$ olarak bulunur. Buradan;

$$\int_C i\bar{z}\,dz=\int_0^3\left(t-\frac{4t}{3}i\right)\left(-\frac{4}{3}+i\right)dt=\frac{(3-4i)}{3}\cdot\frac{(-4+3i)}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^3=\frac{25}{2}i\ \#$$

15. $f(z)=\frac{1}{z-a}$, C; pozitif yönlü a merkezli r yarıçaplı çember

Çözüm: $z(t)=a+r.e^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$ olarak alınırsa; $dz=i.r.e^{it}dt$ ve

$f(z(t))=\frac{1}{r.e^{it}}$ elde edilir. Dolayısıyla;

$$\int_C\frac{1}{z-a}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}}\,i.re^{it}dt=i.t\Big|_0^{2\pi}=2\pi i\ \#$$

16. $f(z)=\sinh(iz)$, C; 0 dan $3i$ ye herhangi bir parçalı düzgün eğri.

Çözüm: $f(z)=\sinh(iz)=i.\sin z$ dir. $F(z)=-i.\cos z$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=i.\sin z$ dir. Dolayısıyla

$$\int_C\sinh(iz)dz=\int_C i\sin z\,dz=\left[F(3i)-F(0)\right]=-i.\cos(3i)+i.\cos(0)$$
$$=-i.\cos(3i)+i=(1-\cos(3i))i\ \#$$

17. $f(z)=\mathrm{Im}(z)$, C; pozitif yönde i merkezli 1 yarıçaplı çember

Çözüm: $z(t)=i+e^{it}$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ alalım. $f(z(t))=\mathrm{Im}(z(t))=1+\sin t$ ve $dz=ie^{it}dt$ elde edilir. Dolayısıyla;

$$\int_C \mathrm{Im}(z)\,dz=\int_0^{2\pi}(1+\sin t)\cdot i\cdot e^{it}\,dt=i\int_0^{2\pi}(1+\sin t)\cdot\cos t\,dt-\int_0^{2\pi}(\sin t+\sin^2 t)\,dt$$

$$=i\int_1^1 u\,du+\cos t\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt-\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-\pi\ \#$$

18. $f(z)=|z|^2$, C; $-i$ ile 1 arasındaki doğru parçası.

Çözüm: C; $(0,-1)$ noktasını $(1,0)$ noktasına birleştiren doğru parçası olduğundan;

$z=x+iy$ olmak üzere;

$$\frac{x-0}{0-1}=\frac{y+1}{-1-0}\Rightarrow x=y+1 \text{ ve } y=t\ (-1\leq t\leq 0),\ x=t+1$$

yazabiliriz. Buradan;

$$z(t)=(t+1)+it\ (-1\leq t\leq 0),\ dz=(1+i)dt \text{ ve } f(z(t))=(t+1)^2+t^2$$

yazabiliriz. Böylece;

$$\int_C |z|^2\,dz=\int_{-1}^{0}(2t^2+2t+1)\cdot(1+i)\,dt=(1+i)\left(\frac{2}{3}t^3+t^2+t\right)\Big|_{-1}^{0}=(1+i)\left(\frac{2}{3}-1+1\right)=\frac{2}{3}(1+i)\ \#$$

19. $f(z)=z^2-z+8$, C; 1 ile $(2+2i)$ arasındaki herhangi bir parçalı düzgün eğri

Çözüm: $F(z)=\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{2}z^2+8z$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=z^2-z+8$ dir. Dolayısıyla;

$$\int_C (z^2-z+8)\,dz=F(2+2i)-F(1)=\frac{1}{3}(2+2i)^3-\frac{1}{2}(2+2i)^2+8(2+2i)-\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+8\right]=\frac{17}{6}+\frac{52}{3}i\ \#$$

20. $f(z)=1/z$, C; $x>0$, $y>0$ olan 1.inci dörtte bir düzlemdeki, $3+i$ ile $6+2i$ arasındaki herhangi bir parçalı düzgün eğri,

Çözüm: 1. dörtte bir düzlemdeki her (x,y) için $x>0$ ve $y>0$ dır ve bu bölge basit bağlantılıdır. Burada, $\mathrm{Log}\,z$, $1/z$ nin antitürevidir. Böylece;

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz=\mathrm{Log}(6+2i)-\mathrm{Log}(3+i)=\ln|6+2i|+i\,\mathrm{Arg}(6+2i)-\ln|3+i|-i\,\mathrm{Arg}(3+i)$$

$$=\ln(\sqrt{40})-\ln(\sqrt{10})+i\left[\tan^{-1}(1/3)-\tan^{-1}(1/3)\right]$$

$$=\ln(2)\ \#$$

21. $f(z)=z\bar{z}$, $z(t)=\sin t+i\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$

Çözüm: $f(z(t))=(\sin t+i\cos t)\cdot(\sin t-i\cos t)=1$, $dz=(\cos t-i\sin t)dt$ olduğundan;

$$\int_C z\bar{z}\,dz=\int_0^{2\pi}(\cos t-i\sin t)dt=(\sin t+i\cos t)\Big|_0^{2\pi}=i-i=0\ \#$$

22. $f(z)=z^2\cos(z^3)$, C; 0 dan i ye parçalı bir düzgün eğri.

Çözüm: $F(z)=\frac{1}{3}\sin(z^3)$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=z^2\cos(z^3)$ tür. Böylece;

$$\int_C z^2\cos(z^3)\,dz=F(i)-F(0)=-\cos(-i)=-\cos(i)\ \#$$

23. $f(z)=(1-i)z^2+2iz-4$, C; 1 ile $(2i)$ arasındaki doğru parçası.

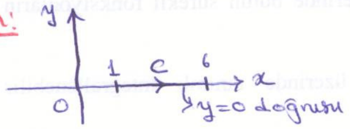
Çözüm: $F(z)=\frac{(1-i)}{3}z^3+iz^2-4z$ alalım. F fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=(1-i)z^2+2iz-4$ tür. Böylece;

$$\int_C\left[(1-i)z^2+2iz-4\right]dz=F(2i)-F(1)=\left[\frac{(1-i)}{3}(2i)^3+i(2i)^2-4(2i)\right]-\left[\frac{(1-i)}{3}+i-4\right]$$

$$=\frac{8-38i}{3}-\frac{-11+2i}{3}=\frac{19-40i}{3}\ \#$$

24. $f(z)=\frac{1}{z}$, C; 1 ile 6 arasındaki doğru parçası.

Çözüm:



C eğrisi; $y=0$ ve $x=t$ $(1\le t\le 6)$ parametrik denklemi ile verildiğinden; $z=x+iy$ olmak üzere; $z(t)=t$ $(1\le t\le 6)$ yazabiliriz. Böylece; $f(z(t))=\frac{1}{(z(t))}=\frac{1}{t}$ ve $dz=dt$ elde edilir.

Dolayısıyla;

$$\int_C\frac{1}{z}\,dz=\int_1^6\frac{1}{t}\,dt=\ln|t|\Big|_1^6=\ln(6)-\ln(1)=\ln(6)\ \#$$

25. $f(z)=z.e^{-z^2}$, C; i ile $1+i$ arasındaki doğru parçalı düzgün eğri.

Çözüm: $F(z)=-\frac{1}{2}e^{-z^2}$ alalım. F basit bağlantılı olan tam kompleks düzlemde analitiktir. $F'(z)=z.e^{-z^2}$ dir. Böylece;

$$\int_C z e^{-z^2}dz = F(1+i)-F(i) = -\frac{1}{2}e^{-(1+i)^2}+\frac{1}{2}e^{-(i)^2} = -\frac{1}{2}\left[e^{-2i}-e\right] \ \#$$

2. C eğrisi orijin merkezli 4 yarıçaplı çember olsun.

$$\left|\int_C \cos(z^2)\,dz\right|$$

ifadesi için bir sınır bulunuz.

Çözüm: $L=2\pi\cdot 4=8\pi$ dir. Ayrıca $z(t)=4\cdot e^{it}$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ alınırsa;

$$|\cos(z^2)| = \left|\frac{1}{2}\left(e^{iz^2}+e^{-iz^2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left[\left|e^{i16e^{i2t}}\right|+\left|e^{-i16e^{i2t}}\right|\right] = \frac{1}{2}\left[\left|e^{-16\sin(2t)}\right|+\left|e^{16\sin(2t)}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-16\sin(2t)}+e^{16\sin(2t)}\right] = \cosh\left[16\sin(2t)\right], \ \forall t\in\mathbb{R} \text{ için } \max\{\sin 2t\}=1$$

$$\leq \cosh(16) = M$$

olarak elde edilir. Böylece;

$$\left|\int_C \cos(z^2)\,dz\right| \leq M\cdot L = 8\pi\cdot\cosh(16) \ \#$$

3. C eğrisi, $2+i$ ile $4+2i$ arasındaki doğru parçası olsun.

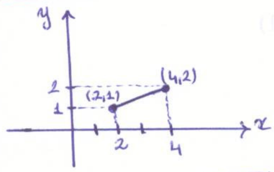
$$\left|\int_C \frac{1}{z+1}\,dz\right|$$

ifadesi için bir sınır bulunuz.

Çözüm:

$$L=\sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\left|\frac{1}{z+1}\right| = \frac{1}{|z+1|} \leq \frac{1}{|z|-1} \leq \frac{1}{\sqrt{5}-1} = M$$



$$\Rightarrow \left|\int_C \frac{1}{z+1}\,dz\right| \leq M\cdot L = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \ \#$$

$$\sqrt{2^2+1^2} \leq |z| \leq \sqrt{4^2+2^2}$$

$$\sqrt{5}-1 \leq |z|-1 \leq 2\sqrt{5}-1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}-1} \leq \frac{1}{|z|-1} \leq \frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

4. γ eğrisi $z=e^{it}$ $(0\leq t\leq \pi)$ yarı-çemberi olsun.

(a) $\left|\int_\gamma (z^2+2z+7)\,dz\right| \leq 10\pi$ ve (b) $\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2z+7}\right| \leq \frac{\pi}{4}$

(c) $\left|\int_\gamma e^z\,dz\right| \leq \pi.e$

olduklarını ispatlayınız.

Çözüm:

(a) $L=\frac{2\pi\cdot 1}{2}=\pi$ dir. Ayrıca; $|z^2+2z+7|\leq |z|^2+2|z|+7\leq 1^2+2\cdot 1+7=10$ $(|z|=1)$ $=M$

olduğundan;

$$\left|\int_\gamma (z^2+2z+7)\,dz\right| \leq M\cdot L = 10\cdot\pi \ \#$$

(b) $|z^2+2z+7|=|7-(-z^2)-(-2z)|\geq 7-|z^2|-|2z|$ $(|z|=1)$

$\Longrightarrow \frac{1}{|z^2+2z+7|}=\left|\frac{1}{z^2+2z+7}\right|\leq \frac{1}{7-|z|^2-2|z|}=\frac{1}{4}=M$ olduğundan

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2z+7}\right| \leq M\cdot L = \frac{\pi}{4} \ \#$$

(c) $|e^z|=|e^{e^{it}}|=|e^{\cos t+i\cdot\sin t}|=|e^{\cos t}|=e^{\cos t}$ ve $\max\{\cos t\}=1$ olduğundan

$$|e^z|\leq e^1=e=M$$

bulunur. Böylece;

$$\left|\int_\gamma e^z\,dz\right| \leq M\cdot L = e.\pi \ \#$$

5. γ, birim çemberin üst yarısı ise; $\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2}\right|$ ifadesi için bir üst sınır bulunuz.

Çözüm: $|z^2+2|=|2-(-z^2)|\geq |2|-|z^2|=2-|z|^2=1$ $(|z|=1)$ olduğundan

$\frac{1}{|z^2+2|}\leq 1=M$ elde edilir. Ayrıca $L=\pi$ olduğundan;

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2}\right| \leq M\cdot L=\pi \ \#$$

6. γ, $|z-1|=1$ çemberi ise; $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z-i}\,dz\right| \le \frac{2\pi e^2}{\sqrt{2}-1}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $z(t)=1+e^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$ alınırsa; $L=2\pi$ bulunur. Ayrıca;

$|z|=\sqrt{2(1+\cos t)}$ olduğundan; $\left|\frac{e^z}{z-i}\right| \le \frac{|e^z|}{|z|-|i|} = \frac{e^{1+\cos t}}{\sqrt{(1+\cos t)2}-1} \le \frac{e^{1+\cos t}}{\sqrt{2}-1}$

elde edilir. Burada $\cos t=1$ alınırsa;

$$\left|\frac{e^z}{z-i}\right| \le \frac{e^2}{\sqrt{2}-1}=M$$

bulunur. Böylece;

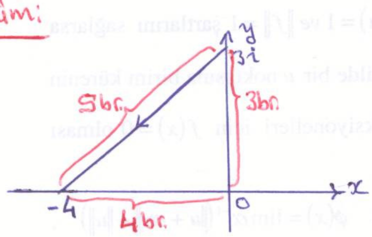
$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z-i}\,dz\right| \le M.L = \frac{2\pi e^2}{\sqrt{2}-1} \ \#$$

7. γ eğrisi, köşeleri; $z_1=0$, $z_2=3i$ ve $z_3=-4$ olan pozitif yönlü bir üçgense;

$$\left|\int_\gamma (e^z-\bar{z})\,dz\right| \le 60$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



Şekilden de görüleceği üzere; $L=3+4+5=12$ br. dir.

Ayrıca;

$$|e^z-\bar{z}| \le |e^z|+|\bar{z}| = |e^x|+|z| = e^x+|z|$$

olup; γ üzerinde $-4\le x\le 0$ ve $\max\{z\}=4$ olduğundan (e^x artan fonk. olduğundan $\max\{e^x\}=1$)

$$|e^z-\bar{z}| \le (1+4)=5=M$$

elde edilir. Böylece;

$$\left|\int_\gamma (e^z-\bar{z})\,dz\right| \le M.L = 5.12 = 60 \ \#$$

8. γ, pozitif yönlü birim çemberin üst yarısı ise;

$$\left|\int_{\gamma} \frac{z}{e^z}\,dz\right| \leq \cancel{\frac{\pi}{2}}\,\pi.e$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $L = \frac{2\pi.1}{2} = \pi$ dir. Ayrıca; $z(t) = e^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$ alalım. $(|z| = 1)$.

$$\left|\frac{z}{e^z}\right| = \frac{|z|}{e^{\cos t}} = \frac{1}{e^{\cos t}}$$, $0 \leq t \leq \pi$ için $-1 \leq \cos t \leq 1$ dir. Ayrıca e^x artan fonksiyon olduğundan; $e^{-1} \leq e^{\cos t} \leq e^{1} \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e^{\cos t}} \leq e$ elde edilir.

Dolayısıyla;

$$\left|\frac{z}{e^z}\right| = \frac{1}{e^{\cos t}} \leq e$$

bulunur. Böylece;

$$\left|\int_{\gamma} \frac{z}{e^z}\,dz\right| \leq \pi.e \;\#$$

9. γ, birim çember ise;

$$\left|\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2}\,dz\right| \leq 2\pi e$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $L = 2\pi$ dir. $z(t) = e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ alalım. $|z| = 1$ olduğundan;

$$\left|\frac{\sin z}{z^2}\right| = \frac{|\sin z|}{|z|^2} = |\sin z| = \left|\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(e^{\sin t} + e^{\sin t}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(e^{\sin t} + e^{\sin t}\right) \text{ ve } \max\{\sin t\} = 1$$

$$\leq \frac{1}{2}(e + e) = e = M$$

elde edilir. Böylece;

$$\left|\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2}\,dz\right| \leq M.L = 2\pi e \;\#$$

10. $\gamma(t)=3e^{it}\ (0\le t\le \pi)$ olmak üzere; $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz\right| \le \frac{3}{2}\pi e^3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: γ yarım çember olduğundan; $L(\gamma)=3\pi$ dir. Ayrıca;

$$|z|=|z+1-1|\le |z-1|+1 \Rightarrow |z|-1\le |z-1| \Rightarrow \frac{1}{|z-1|}\le \frac{1}{|z|-1}=\frac{1}{2}\ (|z|=3)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $|e^z|=e^{Re(z)}\le e^3$ ($Re(z)\le 3$ olduğundan) dır. Böylece;

$$\left|\frac{e^z}{z-1}\right| \le \frac{e^{Re(z)}}{|z|-1}\le \frac{e^3}{2}$$

elde edilir. Buradan da;

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz\right| \le 3\pi.\frac{e^3}{2}\ \#$$

11. $\gamma(t)=R.e^{it},\ R>1\ (0\le t\le\pi)$ olmak üzere; $\left|\int_\gamma \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}dz\right|\le \frac{\pi.R}{(R^2-1)^2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: γ yarım çember olduğundan; $L(\gamma)=\pi R$ dir. Ayrıca;

$$|z^2|=|z^2+1-1|\le |z^2+1|+1 \Rightarrow |z^2|-1\le|z^2+1| \Rightarrow \frac{1}{|z^2+1|}\le\frac{1}{|z^2|-1}\ (|z|>1 \text{ için})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(|z^2+1|)^2}\le\frac{1}{(|z|^2-1)^2} \text{ ve } |z|=R \text{ olduğundan } \frac{1}{(|z^2+1|)^2}\le\frac{1}{(R^2-1)^2} \text{ yazabiliriz. Ayrıca;}$$

$|e^{2iz}|=|e^{iz}|^2=|e^{Re(iz)}|^2=|e^{-Im(z)}|^2$ dir. γ nın üst yarı düzlemde kaldığı göz önüne alınırsa; $Im(z)\ge 0$ dır. Böylece; $e^{-Im(z)}\le 1$ ve böylece $|e^{2iz}|\le 1$ bulunur.

Buradan; $\left|\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\right|\le\frac{1}{(R^2-1)^2}$ olup $\left|\int_\gamma\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}dz\right|\le\frac{\pi R}{(R^2-1)^2}\ \#$

12. $\gamma,\ |z|=R>1$ olan çember ise (pozitif yönlü);

$$\left|\int_\gamma \frac{\log z}{z^2}dz\right|\le 2\pi\left(\frac{\pi+\log R}{R}\right)$$

olduğunu gösteriniz. $R\to\infty$ için integralin değerini hesaplayınız.

Çözüm: $$\left|\int_\gamma\frac{\log z}{z^2}dz\right|\le\int_\gamma\left|\frac{\log z}{z^2}\right||dz|=\int_\gamma\frac{|\log z+i\arg z|}{R^2}|dz|\le\int_\gamma\frac{\log R+\theta}{R^2}|dz|$$

$$\Rightarrow \left|\int_\gamma\frac{\log z}{z^2}dz\right|\le\int_\gamma\frac{\log R+\theta}{R^2}|dz|=\int_0^{2\pi}\frac{\log R+\theta}{R^2}.R.d\theta=2\pi\left(\frac{\log R+\pi}{R}\right)\ \#$$

Burada $R\to\infty$ yazılırsa; $\lim_{R\to\infty}\int_\gamma\frac{\log z}{z^2}dz=0$ elde edilir.

3. Cauchy-İntegral Teoremi:

Eğer C kapalı bir eğri ise $\int_C f(z)dz$ integrali yerine $\oint_C f(z)dz$ gösterimi kullanılacaktır. İntegral üzerindeki oval işareti sadece eğrinin kapalı olduğunu göstermeye yarayacaktır.

Teorem (Green Teoremi): C eğrisi pozitif yönde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri ve C nin çevrelediği iç noktaların oluşturduğu bölge R olsun. Eğer R ve C üzerindeki her noktada P ve Q sürekli ve P_x, P_y, Q_x, Q_y kısmi türevleri sürekli ise bu durumda

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left[Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right] dA$$

dır.

Teorem (Cauchy-İntegral Teoremi): f fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesi içinde analitik olsun. Eğer C eğrisi D içinde bir basit kapalı eğri ise

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

dır.

ÖR. C eğrisi pozitif yönde yönlendirilmiş $|z|=4$ çemberi ise

$$\oint_C \sin z \, dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\sin z$ fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tam kompleks düzlemde analitiktir. C eğrisi kompleks düzlemde basit kapalı eğri olduğundan Cauchy-integral teoreminden

$$\oint_C \sin z \, dz = 0$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki alıştırmalardaki $\oint_C f(z)dz$ integralini hesaplayınız. Bütün kapalı eğriler pozitif yönde yönlendirilmiştir.

1. $f(z)=\sin(3z)$, $C: |z|=4$

Çözüm: $f(z)=\sin(3z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tüm kompleks düzlemde analitiktir. C eğrisi kompleks düzlemde basit kapalı eğri olduğundan Cauchy-İntegral Teoremi'nden;

$$\oint_C \sin(3z)dz = 0 \quad \text{bulunur.}$$

2. $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $C: |z|=5$

Çözüm: $f(z)=1/z$ fonksiyonu verilen bölgede analitik değildir. Dolayısıyla; $z=5.e^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ alınırsa, $dz=5ie^{i\theta}d\theta$ ve $f(z(\theta))=\frac{1}{5}e^{-i\theta}$ bulunur.

Böylece;

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5}e^{-i\theta}.5ie^{i\theta}d\theta = i\theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i \quad \text{bulunur.}$$

3. $f(z)=\bar{z}$, $C: |z|=1$

Çözüm: $f(z)=\bar{z}$ fonksiyonu hiç bir yerde analitik değildir. Dolayısıyla; $z(\theta)=e^{i\theta}$ alınırsa $dz=ie^{i\theta}d\theta$ ve $f(z(\theta))=e^{-i\theta}$ bulunur. Böylece;
(Burada $0\leq\theta\leq 2\pi$ dir.)

$$\oint_C \bar{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}.ie^{i\theta}d\theta = i\theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i \quad \text{bulunur.}$$

4. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)^3}$, $C: |z-2i|=2$

Çözüm: $f(z)=1/(z-2i)^3$ fonksiyonu verilen bölgede analitik değildir. Dolayısıyla; $z(\theta)=2i+2e^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ alınırsa; $dz=2ie^{i\theta}d\theta$ ve $f(z(\theta))=\frac{1}{8}e^{-3i\theta}$ bulunur.

Böylece;

$$\oint_C \frac{1}{(z-2i)^3}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}e^{-3i\theta}.2ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{4}i\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}d\theta = -\frac{1}{8}e^{-2i\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0 \ \#$$

5. $f(z)= z^2-|z|$, $C: |z|=4$

Çözüm: $f(z)= x^2-y^2-4+2ixy$ olup $u(x,y)=x^2-y^2-4$ ve $v(x,y)=2xy$ dir.
$u_x(x,y)=2x$, $u_y(x,y)=-2y$, $v_x(x,y)=2y$, $v_y(x,y)=2x$ olup $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ C-R denklemleri sağlanır. u ve v, verilen bölgede kendileri ve birinci mertebeden bütün kısmi türevleri sürekli olan ve kısmi türevleri C-R denklemlerini sağlayan fonksiyonlar olduklarından $f(z)$ fonksiyonu verilen bölgede analitiktir. C eğrisi bu bölgede basit kapalı eğri olduğundan Cauchy İntegral Teoremi'nden;

$$\oint_C (z^2-|z|)\,dz=0 \quad \text{bulunur.}$$

6. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$, $C: |z-i|=\dfrac{1}{4}$

Çözüm: İntegrant $z=i$ ve $z=-i$ noktalarında analitik değildir. İntegrantı basit kesirlere ayıralım. Böylece;

$$\frac{1}{z^2+1}=-\frac{1}{2}\,\frac{i}{z-i}+\frac{1}{2}\,\frac{i}{z+i} \quad \text{elde edilir.}$$

Analitikliği bozan noktalardan yalnızca $z=i$ noktası C nin içindedir ve $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{i}{z+i}$ fonksiyonu C nin içinde ve üzerinde analitiktir. Böylece Caucy Teoreminden;

$$\oint_C \frac{i}{2(z+i)}\,dz=0 \quad \text{olur.}$$

Yalnızca $\oint_C -\dfrac{i}{2(z-i)}\,dz$ integralini hesaplamalıyız. C eğrisinin parametrik denklemi; $z=i+\frac{1}{4}e^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$ dir. Dolayısıyla $z-i=\frac{1}{4}e^{it}$, $dz=\frac{1}{4}ie^{it}dt$ olduğundan;

$$\oint_C -\frac{i}{2(z-i)}\,dz=-\frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{4}ie^{it}}{\frac{1}{4}e^{it}}\,dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}=\pi \;\#$$

7. $f(z)=z^2\cdot\sin z$, C: Köşeleri $0, 1, 1+i$ ve i olan kare;

Çözüm: f fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tüm kompleks düzlemde analitiktir. C eğrisi kompleks düzlemde basit kapalı eğri olduğundan Cauchy Teoremi'nden;

$$\oint_C z^2\cdot\sin z\,dz=0$$ bulunur.

8. $f(z)=\dfrac{2z}{z-i}$, $C:|z-i|=3$

Çözüm: İntegrantı $f(z)=2+\dfrac{2i}{z-i}$ şeklinde düzenleyelim. İntegrant $z=i$ noktasında analitik değildir ve analitikliği bozan nokta C nin içindedir. C eğrisinin parametrik denklemi; $z=i+3\cdot e^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$ olup $z-i=3\cdot e^{it}$ ve $dz=3ie^{it}dt$ dir. Böylece;

$$\oint_C \frac{2z}{z-i}\,dz=\oint_C\left(2+\frac{2i}{z-i}\right)dz=\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{2i}{3\cdot e^{it}}\right)\cdot 3ie^{it}\,dt$$

$$=6i\int_0^{2\pi}e^{it}\,dt-2t\Big|_0^{2\pi}=6e^{it}\Big|_0^{2\pi}-4\pi=-4\pi \ \#$$

9. $f(z)=z\cdot e^z$, $C:|z-3i|=8$

Çözüm: f fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tüm kompleks düzlemde analitiktir. C eğrisi kompleks düzlemde basit kapalı eğri olduğundan Cauchy Teoremi'nden;

$$\oint_C z\cdot e^z\,dz=0$$ bulunur.

10. $f(z)=z^2-4z+8$, C: Köşeleri $1, 8, 8+4i$ ve $1+4i$ olan dikdörtgen

Çözüm: f fonksiyonu basit bağlantılı bölge olan tüm kompleks düzlemde analitiktir. C eğrisi kompleks düzlemde basit kapalı eğri olduğundan Cauchy Teoremi'nden;

$$\oint_C (z^2-4z+8)\,dz=0$$ bulunur.

11. $f(z)=\sin(1/z)$, $C:|z-1+2i|=1$

Çözüm: f fonksiyonu verilen bölgede analitiktir. C eğrisi basit kapalı eğri olduğundan Cauchy Teoremi'nden;

$$\oint_C \sin\left(\frac{1}{z}\right)dz=0$$ bulunur.

12. $f(z)=|z|^2, \; C:|z|=5$

Çözüm: f fonksiyonunun reel ve sanal kısımları olan $u(x,y)=x^2+y^2$ ve $v(x,y)=0$ fonksiyonları C-R denklemlerini sağlamadıklarından f fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir. C eğrisinin parametrik denklemi; $z=5.e^{it}$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ olup $dz=5ie^{it}$ dir. Böylece;

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_0^{2\pi} 5^2 \cdot 5ie^{it} dt = 125 e^{it}\Big|_0^{2\pi} = 0 \text{ bulunur.}$$

13. $f(z)=Re(z), \; C:|z|=2$

Çözüm: f fonksiyonunun reel ve sanal kısımları olan $u(x,y)=x$ ve $v(x,y)=0$ fonksiyonları C-R denklemlerini sağlamadıklarından f fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir. C eğrisinin parametrik denklemi; $z=2.e^{it}$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ olup $dz=2ie^{it}$ dir. Böylece;

$$\oint_C Re(z)\, dz = \int_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 2ie^{it} dt = 4i\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + i\cdot \sin t\cdot \cos t)\, dt$$

$$= 4i\cdot\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt - 4\cdot\int_0^{2\pi} \sin t\cdot\cos t\, dt = 4i\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi i \;\#$$

14. $f(z)=\dfrac{z^3-2z+4}{z^8-2}, \; C:|z-12|=2$

Çözüm: f fonksiyonu verilen bölgede analitiktir. C eğrisi basit kapalı eğri olduğundan; Cauchy Teoreminden; $\displaystyle\oint_C \frac{z^3-2z+4}{z^8-2}dz = 0$ bulunur.

15. $f(z)=\dfrac{z^2-8z}{\cos z}$, C: Köşeleri $-\frac{\pi i}{4}, \frac{\pi}{4}-\frac{\pi i}{4}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi i}{4}, \frac{\pi i}{4}$ olan dikdörtgen

Çözüm: f fonksiyonunun analitikliğini bozan $\frac{\pi}{2}(2k+1), k\in\mathbb{Z}$ noktaları verilen bölgenin dışında olduklarından f fonksiyonu bu bölgede analitiktir. C eğrisi basit kapalı eğri olduğundan; Cauchy Teoreminden; $\displaystyle\oint_C \frac{z^2-8z}{\cos z}dz = 0$ bulunur.

16. $f(z)= z^2+\mathrm{Im}(z)$, C: Köşeleri $0, -2i, 2-2i, 2$ olan kare

Çözüm:

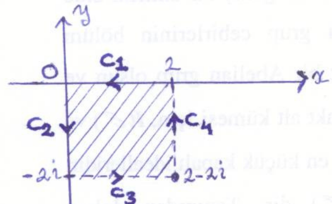
$$\oint_C (z^2+\mathrm{Im}(z))\,dz = \oint_C z^2\,dz + \oint_C \mathrm{Im}(z)\,dz$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki integralleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$\oint_C z^2\,dz$, integralinde; integrant (z^2), basit bağlantılı bölge olan tüm kompleks düzlemde analitiktir. C eğrisi basit kapalı eğri olduğundan Cauchy Teoremi'nden;

$$\oint_C z^2\,dz = 0$$ bulunur.

$\oint_C \mathrm{Im}(z)\,dz$ integralini hesaplayalım. $\mathrm{Im}(z)$ fonksiyonunun reel ve sanal kısımları olan $u(x,y)=0$ ve $v(x,y)=y$ fonksiyonları C-R denklemlerini sağlamadıklarından $\mathrm{Im}(z)$ fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir. Verilen bölge yandaki şekilde gösterilmiştir.



$$\oint_C \mathrm{Im}(z)\,dz = \oint_{C_1} \mathrm{Im}(z)\,dz + \oint_{C_2} \mathrm{Im}(z)\,dz + \oint_{C_3} \mathrm{Im}(z)\,dz + \oint_{C_4} \mathrm{Im}(z)\,dz$$

yazılabilir. Şimdi C_1, C_2, C_3 ve C_4 eğrilerinin parametrik denklemlerini yazalım.

C_1: $y=0,\ 0\le x\le 2 \Rightarrow z(t)=t$ (burada $x=t$ dir) $(0\le t\le 2)$, $dz=dt$, $f(z(t))=0$

C_2: $x=0,\ -2\le y\le 0 \Rightarrow y=t \Rightarrow z(t)=it$ $(-2\le t\le 0)$, $dz=i\,dt$, $f(z(t))=t$

C_3: $y=2,\ 0\le x\le 2 \Rightarrow x=t \Rightarrow z(t)=t+2i$ $(0\le t\le 2)$, $dz=dt$, $f(z(t))=2$

C_4: $x=2,\ -2\le y\le 0 \Rightarrow y=t \Rightarrow z(t)=2+it$ $(-2\le t\le 0)$, $dz=i\,dt$, $f(z(t))=t$

dir. Böylece;

$$\oint_C \mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^2 0\cdot dt + \int_{-2}^0 t\,i\,dt + \int_0^2 2\,dt + \int_{-2}^0 t\cdot i\,dt = 4-4i \ \#$$

Sonuç olarak;

$$\oint_C (z^2+\mathrm{Im}(z))\,dz = 0+4-4i = 4-4i \ \#$$