1-] (a) L bir lineer uzay ve $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ bu uzayda iki norm olsun.

$\forall x\in L$ için $a\cdot\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\cdot\|x\|_1$ ol. şekilde pozitif a,b sayıları mevcutsa; $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına Denk Normlar denir.

Teo: Sonlu boyutlu uzaylar üzerinde tanımlı tüm normlar birbirine denktir.

İspat: İki normun birbirine denk old. göstermek yeterlidir.

$Boy(L)=n$ ve $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ L nin herhangi bir bazı olsun. $\forall x\in L$ elemanı

$$x=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$$

olarak bir tek şekilde ifade edilebilir. Bilinen lemmadan dolayı;

$$\|x\| \geq c\left(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\dots+|\alpha_n|\right)$$

ol. şekilde pozitif c vardır. Üçgen eşitsizliğinden;

$$\|x\|_2 \le \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\cdot\|e_i\|_2 \le k\cdot\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \le \frac{k}{c}\|x\|_1$$

$$k=\max\|e_i\|_2$$

yani $\|x\|_2 \le \frac{k}{c}\|x\|_1$ veya $\frac{c}{k}\|x\|_2 \le \|x\|_1$ elde edilir. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ nin rolleri değiştirilerek istenen sonuç elde edilir.

(b) X bir metrik uzay olsun. X deki her bir dizi yakınsak bir alt diziye sahipse; X e kompakt denir.

$\#$ $\bar{D}=\{x\in N: \|x\|\le 1\}$ kompakt fakat $Boy(N)=\infty$ old. kabul edelim:

$\bar{D}$ da bir dizi oluşturarak çelişki vermeye çalışacağız.

$x_1\in N$ ve $\|x_1\|=1$ olsun. Bu x_1, N in boyutu 1 olan N_1 altuzayını gerer. N_1 kapalı ve $Boy N=\infty$ old. N_1, N in has alt cümlesidir. Riesz Lem. dolayı; $\|x_2\|=1$ ve $\|x_2-x_1\| \geq \alpha = \frac{1}{2}$ ol. şek. $x_2\in N$ vardır. Bu x_1 ve x_2, N in iki boyutlu kapalı bir N_2 has altuzayını gerer. Yine R. Lemmasından dolayı: $\|x_3\|=1$ ve $\forall x\in N_2$ için $\|x_3-x\| \geq \frac{1}{2}$ Buradan; tümevarımla $\|x_m-x_n\| \geq \frac{1}{2}$ $(m\neq n)$ ol. şekilde $\bar{D}$ de (x_n) dizisi elde edelim. Yani (x_n) in yakınsak alt dizisi yoktur.

2-] (a) T operatörü sıfırda sürekli $\Rightarrow$ T sürekli.

Eğer operatör $x_0=0$ da sürekli ise $x_n \to x_0$ olması $f(x_n) \to f(x_0=0)$ olmasını gerekt..

T nın heryerde sürekliliği için herhangi $y \in N$ için $y_n \to y$ olması $T(y_n) \to T(y)$ old. göstermeliyiz. $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ kabul edelim. $T(y_n) = T(y_n + y - y + 0 - 0)$, T lin. old.

$T(y_n) = T(y_n - y + 0) + T(y) - T(0)$. $y_n \to y$ old. $y_n - y + 0 \to 0$ olur..

T sürekli old. $T(y_n - y + 0) \to T(0)$. Buradan $T(y_n) \to T(y)$ old. yazabiliriz. Bu da T nın herhangi bir $y \in N$ de de sürekli olması demektir.

(b) Lineer İzomorfi: L ve L' iki lin. uzay olsun. $T: L \to L'$ dönüşümü 1:1 ve örten ise; T ye lineer izomorfi ve L ve L' uzaylarında izomorf lin. vek. uzaylarıdır $L \cong L'$

$\boxed{c \cong \gamma}$ $\{a_k\} \in \gamma$ ve $S_k = a_1 + \dots + a_k$ dizisi. $\sum a_k$ nın kısmi top. dizisi olsun.

$f: \gamma \to c$. f 1:1 olması $f(\{a_k^1\}) = f(\{a_k^2\}) \Rightarrow \forall k$ için $S_k^1 = S_k^2$ olur.

$\{a_k\} \to \{S_k\}$

$a_1^1 = a_1^2, \dots$ yani $\{a_k^1\} = \{a_k^2\}$ dır. Yani f; 1:1 dir.

f örtendir $(S_k) \in c \Rightarrow k > 1$ dır. $a_1 = s_1$, $a_k = s_k - s_{k-1}$ alalım. Bu takdirde

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} a_i = \lim_{k \to \infty} S_k = l$$ olur. $\sum a_i$ serisi yakınsaktır, yani

$\{a_k\} \in \gamma$ olur. $f(\{a_k\}) = \{S_k\}$ old. f örtendir.

f lineer: $\forall n$ için $\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k^1 + \mu a_k^2) = \lambda S_n^1 + \mu S_n^2$ old. lineerdir.

f dönüşümü 1:1, örten ve lineer old. $c \cong \gamma$ old. ispat edilmiş olur.

3-] (a) $x-y = (2, 3+i, 2) - (2+i, 2-i, 3) = (-i, 1+2i, -1)$

$x-2y = (2, 3+i, 2) - (4+2i, 4-2i, 6) = (-2-2i, -1+3i, -4)$

$2x-y = (4, 6+2i, 4) - (2+i, 2-i, 3) = (2-i, 4+3i, 1)$

$\|x-y\|_1 = |-i| + |1+2i| + |-1| = \underbrace{2+\sqrt{5}}$ (i)

$\|x-2y\|_2 = \sqrt{|-2-2i|^2 + |-1+3i|^2 + |-4|^2} = \sqrt{8+10+16} = \underbrace{\sqrt{34}}$ (ii)

$\|2x-y\|_\infty = \operatorname{Max}\{|2-i|, |4+3i|, |1|\} = |4+3i| = \underbrace{5}$ (iii)

$\|(2, 3+i, 2)\|_1 + \|(2, 3+i, 2)\|_2 + \|(2+i, 2-i, 3)\|_\infty = (4+\sqrt{5}) + (\sqrt{4+10+4}) + (\sqrt{5})$
$= \underbrace{4+2\sqrt{5}+\sqrt{18}}$ # (iv)

(b) N, N' normlu uzaylar $T: N \xrightarrow[\text{op.}]{\text{lin.}} N'$. $\forall x \in N$ için $\|T(x)\|' \leq K \cdot \|x\|$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa T'ye sınırlı operatör denir.

$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq K$; $\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N : x \neq \theta \right\}$ olsun. Bu $\|T\|$ ye T'nin <u>NORMU</u> denir.

$\#\#$ $k = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ olsun. $\underbrace{k \leq \|T\|}$ olduğu açıktır. $\|x\| \leq 1$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $y = \frac{x}{\|x\| + \varepsilon}$ vektörünün normu 1'den küçüktür. O halde $\|T(y)\| \leq k$, yani $\|T(x)\| \leq k(\|x\| + \varepsilon)$ dir. $\varepsilon \to 0$ için $\|T(x)\| \leq k \cdot \|x\| \leq k$ olur. Buradan anlaşılır ki $\|x\| \leq 1$ için $\underbrace{\|T\| \leq k}$ ve dolayısıyla $\underbrace{\|T\| = k}$ dır.

4] ⓐ $\mathcal{L}(L,L') = \{T \mid T: L \to L', \text{lineer}\}$

$+: (T_1+T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$

$\cdot: (\alpha T)(x) = \alpha T(x)$

$(T_1+T_2)(\alpha x+\beta y) = T_1(\alpha x+\beta y) + T_2(\alpha x+\beta y) = \alpha T_1(x) + \alpha T_2(x) + \beta T_1(y) + \beta T_2(y)$

$= \alpha[(T_1+T_2)(x)] + \beta[(T_1+T_2)(y)]$, $\underline{T_1+T_2 \in \mathcal{L}(L,L')}$ dir.

$\alpha T(x+y) = \alpha(T(x+y)) = \alpha[T(x)+T(y)] = \alpha T(x) + \alpha T(y)$

$\alpha T(\beta x) = \alpha[T(\beta x)] = \alpha[\beta T(x)] = (\alpha\beta)T(x) = (\beta\alpha)T(x) = \beta[\alpha T(x)]$, $\underline{\alpha T \in \mathcal{L}(L,L')}$

Lineer Uzay Sağlar, - - -

ⓑ $T: L \xrightarrow{\text{lin}} L'$ $\text{Çek}(T) = \{x \in L : T(x) = \theta'\} = T^{-1}(\theta')$.

Eğer T - operatörü $T: L \to L'$, $T(x) = \theta'$ şeklinde tanımlanırsa $\text{Çek}(T) = L$

Eğer - - $T: L \to L$, $T(x) = x$ - - $\text{Çek}(T) = \{\theta\}$ dir.

$a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ $T_a: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T_a(x) = x \cdot a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$

$T_a(x+y) = (x+y)a$ $\quad a = (1,0,0)$ için

$= (x+y)(a_1, a_2, a_3)$

$= (x_1+y_1)a_1 + (x_2+y_2)a_2 + (x_3+y_3)a_3 = \dots = T_a(x) + T_a(y)$

$a = (1,0,0)$ $\quad T_a = x_1$ olur. $\text{Çek}(T_a) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (0, x, y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$

$T_a(\alpha x) = \alpha x \cdot a = \alpha x_1 a_1 + \alpha x_2 a_2 + \alpha x_3 a_3$

$= \alpha(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3)$

$= \alpha T(x)$