1

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ 2001	FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ Matematik Bölümü 2014-2015 Eğitim-Öğretim Yılı, II. Dönem MAT412 FONKSİYONEL ANALİZ - II **Vize** Sınavı	Tarihi : 20 / 03 / 2015		Saati : 10:^{00} -- 11:^{15}		
		Değerlendirme				
		1	2	3	4	Toplam
		15p	10p	15p	10p	100p
		15p	10p	15p	10p	

Bölümü	Matematik Bölümü	Not: Süre **75** dakikadır. Soruları cevaplarken ara işlemleri göstermeniz gerekir, işlemsiz doğru cevaplara puan verilmeyecektir. E302
Sınıfı	Cevap Anahtarı	
Numarası		**Başarılar**
Adı – Soyadı		Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

SORULAR

1-) a) *Normların denkliği* tanımını yapınız. Sonlu boyutlu uzaylar üzerinde tanımlı tüm normların birbirine denk olduğunu ispatlayınız.

b) L bir lineer uzay, bu uzayda denk iki norm $\|.\|^1$ ve $\|.\|^2$ verilsin. N normlu bir uzay olmak üzere; $f : L \to N$ dönüşümü bu denk normlardan birine göre sürekli ise diğerine göre de süreklidir, gösteriniz.

2-) a) *Kompaktlık, kapalılık ve sınırlılık* kavramlarını açıklayınız. Kompaktlık kavramının; kapalılık, sınırlılık kavramları ve boyutun sonlu veya sonsuz olması durumları ile ilişkilerini ifade ediniz.

b) *Riesz Lemması*nın ne anlama geldiğini, teoride nasıl kullanıldığını ifade ediniz.

3-) a) *Lineer operatör* tanımını yapınız. L_1 ve L_2 lineer uzaylar ve $T : L_1 \to L_2$ lineer operatör verilsin. Görüntü uzayının boyutunun, tanım uzayının boyutundan daha fazla olamayacağını ispatlayınız.

b) L_1 ve L_2 lineer uzaylar ve $T : L_1 \to L_2$ lineer operatör verilsin. $T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i)$ dir, gösteriniz.

4-) a) $T : \Re^2 \to \Re^2$ ye $T(x) = (x_1, 0)$ şeklinde tanımlı dönüşümün lineer olup-olmadığını gösterip, çekirdeğini bulunuz ve geometrik olarak yorumlayınız.

b) L_1 ve L_2 lineer uzaylar ve $T : L_1 \to L_2$ lineer operatör olsun. $A \subset L_1$ olmak üzere; "A-lineer bağımlı $\Rightarrow$ $T(A)$-lineer bağımlıdır" gösteriniz.

CEVAPLAR

1-) a) L bir lineer uzay ve $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ bu uzayda iki norm olsun. $\forall x \in L$ için

$$a \cdot \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b \cdot \|x\|_1$$

olacak şekilde pozitif a, b sayıları mevcut ise; $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına Denk Norm denir.

L-sonlu boyutlu olsun. Tüm normların birbirine denkliği için herhangi iki normun birbirine denkliğinin gösterilmesi yeterlidir.

$Boy(L) = n$ ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ L nin herhangi bir bazı olsun. $\forall x \in L$ elemanı

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

olarak bir tek şekilde ifade edilebilir. Önceden bildiğimiz lemmadan dolayı;

$$\|x\| \ge c\left(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|\right)$$ olacak şekilde pozitif c vardır.

Üçgen eşitsizliğinden; $\|x\|_2 \le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|e_i\|_2 \le k \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \le \frac{k}{c} \|x\|_1$ $\quad k = \max \|e_i\|_2$

yani $\|x\|_2 \le \frac{k}{c}\|x\|_1$ veya $\frac{c}{k}\|x\|_2 \le \|x\|_1$ elde edilir. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ nin rolleri değiştirilerek istenen sonuç elde edilir.

1] (b) $\|x\|^1$ ve $\|.\|^2$ normları denk old. $\|x\|^2 \leq \alpha.\|x\|^1$ $(\alpha > 0)$. (2)

f dönüşümü $\|.\|^1$ normuna göre sürekli olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|x-x_0\|_1 < \delta$ old. $\|f(x)-f(x_0)\|_1 < \varepsilon$ ol. şek. $\delta > 0$ vardır. O halde $\forall x$ için

$\|x-x_0\|^2 \leq \alpha.\|x-x_0\|^1 < \alpha.\delta < \delta_1$ olduğunda

$\|f(x)-f(x_0)\|^2 \leq \alpha\|f(x)-f(x_0)\|^1 < \alpha.\varepsilon < \varepsilon_1$ olacak şekilde $\delta_1 > 0$ sayısı mevcuttur.

O halde f, $\|.\|^2$-normuna göre de süreklidir.

2] (a) # X bir metrik uzay olsun. X deki her bir dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X'e kompakt denir.

(X,d) ve $A \subset X$ olsun ve $A \neq \emptyset$ olsun. Çap$(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\} < \infty$, ise, yani çapı sonlu ise; kümeye sınırlı denir.

(X,d), $A \subseteq X$. $A^t = X - A$ kümesi X de açık ise, A nın kendisi kapalıdır.

Metrik Uzayda kompakt alt cümleler kapalı ve sınırlıdır.

Sonlu boyutlu Normlu Uzaylarda, kümenin kompakt olması $\Leftrightarrow$ kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Sonsuz boyutlu normlu uzaylarda kapalı ve sınırlı olma; her ~~zaman~~ kompaktlığı garanti etmez.

(b) Riesz Lemması; Sonsuz boyutlu bir normlu uzayda, Riesz şartı geçerliyse eğer; sonsuz boyutlu uzayların kompaktlığı için kullanılan «her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır» iddiası ortadan kalkar.

3] a) L ve L' aynı F cismi üzerinde lin. uzay olsun. $T: L \to L'$ operatörü

$T(x+y) = T(x) + T(y)$ ve $T(\alpha x) = \alpha.T(x)$ $(\alpha \in F)$ şartını sağlıyorsa,

T-ye lineer operatör denir.

$T: L \to L'$. $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ $T(L)$ de keyfi alınmış $n+1$ vektör olsun.

Bu takdirde $y_1 = T(x_1)$, $y_2 = T(x_2)$, ..., $y_{n+1} = T(x_{n+1})$ ol. şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in L$ vardır. Boy$(L) = n$ old. için $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ cümlesi lin. bağımlıdır. Bu durumda

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \theta$$

ol. şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ skalerleri mevcuttur.

Eşitliğin her iki yanının T altındaki görüntüsü alınırsa; $T(\theta)=\theta'$ olduğundan; $T(\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_{n+1}x_{n+1})=\alpha_1 y_1+\dots+\alpha_n y_n=\theta'$ dır.

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}$ skalerlerinin hepsi birden sıfır olmadığından; $\{y_1,y_2,\dots,y_{n+1}\}$ cümlesi lineer bağımlıdır. Yani $Boy(T(L))\leq n$ 'dir.

$\boxed{4}$ (a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ dir. $T(x)=(x_1,0)$

$(x_1,x_2)\to(x_1,0)$

$x,y\in\mathbb{R}^2$, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ $\quad T(x+y)\overset{?}{=}T(x)+T(y)$ $\quad T(\alpha x)\overset{?}{=}\alpha T(x)$

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$$T(x_1+y_1,x_2+y_2)=(x_1+y_1,0+0)=(x_1,0)+(y_1,0)=T(x)+T(y)$$

$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2)$

$$T(\alpha x)=T(\alpha x_1,\alpha x_2)=(\alpha x_1,0)=\alpha(x_1,0)=\alpha T(x)$$

T-dönüşümü lineerdir.

$$Çek(T)=\{(x_1,x_2):T(x_1,x_2)=0\}=\{(0,x_2)\}\text{ dir.}$$

Bu dönüşüm bir projeksiyon dönüşümüdür. Düzlemdeki noktaları, x-ekseni üzerindeki koordinatlarına dönüştürür. Bu dönüşüm çekirdeği de y-eksenidir.

(b) $T:L\to L'$, $A\subset L$, A-lin. bağımlı old. $T(A)$ da lin. bağımlıdır.

$y_1,y_2,\dots,y_n\in T(A)$ olsun. Bu takdirde T-lineer old. $\left.\begin{matrix}T(x_1)=y_1\\ \dots\\ T(x_n)=y_n\end{matrix}\right\}$ olacak şekilde $x_1,x_2,\dots,x_n\in A$ vardır.

A-lin. bağımlı old. $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0$ old. en az bir i için $\alpha_i\neq0$ dır. Kabul edelim ki $\alpha_1\neq0$ dır. T-lin. old.

$$T(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n)=T(0)=0$$

$$\alpha_1T(x_1)+\alpha_2T(x_2)+\dots+\alpha_nT(x_n)=0$$

$$\alpha_1y_1+\dots+\alpha_ny_n=0$$

denkleminde $\alpha_1\neq0$ old. $y_1,y_2,\dots,y_n$ vektörleri lineer bağımlıdır.

O halde $T(A)$ 'da lineer bağımlıdır.