

1	2	3	4	Toplam

Bölümü

Matematik Bölümü

Sınıfı

Not: Süre 75 dakikadır. Soruları cevaplarken ara işlemleri göstermeniz gerekir. En az 7 soru cevaplanacaktır. Sorular eşit puanlıdır. B403

Numarası

**Başarılar**

Adı – Soyadı

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

## SORULAR

- 1-(a)**  $L$  lineer uzayı ve üzerinde tanımlı iki farklı norm verilsin. Bu *normların denkliliğini* tanımlayınız. Bu iki norm, hangi durumlarda her zaman denktirler? İfade ediniz ve bu ifadenizi ispat ediniz
- (b)** *Kompaktlık* kavramını tanımlayınız.  $N$  normlu uzayı ve bu uzayda bir kapalı birim yuvar verilsin. Bu kapalı birim yuvar kompakt ise  $N$  sonlu boyutludur, ispatlayınız.
- 2-(a)**  $(N, \|\cdot\|)$  ve  $(N', \|\cdot\|')$  iki lineer uzay ve  $T: N \rightarrow N'$  lineer bir operatör olsun. “(1):  $T$  operatörü sıfır noktasında süreklidir, (2):  $T$  operatörü sürekli bir dönüşümdür”, ifadeleri verilsin. “(1)  $\Rightarrow$  (2)” önermesini ispatlayınız.
- (b)** *Linear izomorfi* kavramını tanımlayınız. Yakınsak dizilerin uzayının, yakınsak serilerin uzayına izomorf olduğunu ispatlayınız.
- 3-(a)**  $C^3 (= C \times C \times C)$  üzerinde tanımlı  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  ve  $\|\cdot\|_\infty$  normlarını kullanarak,  $x = (2, 3 + i, 2)$ ,  $y = (2 + i, 2 - i, 3) \in C^3$  için aşağıdakileri hesaplayınız.
- i)**  $\|x - y\|_1 = ?$       **ii)**  $\|x - 2y\|_2 = ?$       **iii)**  $\|2x - y\|_\infty = ?$       **iv)**  $\|x\|_1 + \|x\|_2 + \|y\|_\infty = ?$
- Not:**  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^3 |x_k|$        $\|x\|_2 = \left( \sum_{k=1}^3 |x_k|^2 \right)^{1/2}$        $\|x\|_\infty = \max_{k=1,2,3} |x_k|$
- (b)** Bir operatörün *sınırlılığı* ve *normu* tanımlarını yazınız.  $N$  ve  $N'$  normlu uzaylar ve  $T: N \rightarrow N'$  sınırlı operatör olsun.  $T$  nin operatör normu  $\|T\|$  ile tanımlanırsa;  $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| < 1\}$  olduğunu gösteriniz.
- 4-(a)**  $L$  ve  $L'$  iki lineer uzay ve  $\mathcal{L}(L, L') = \{T | T: L \rightarrow L' \text{ lineer}\}$  verilsin. Bu  $\mathcal{L}$  uzayını lineer uzay yapan işlemleri yazınız ve  $\mathcal{L}$  uzayının bu işlemlerle bir *linear uzay* olduğunu gösteriniz.
- (b)** Bir *linear operatörün çekirdeği* tanımını yapınız. Operatörün çekirdeği hangi durumda tanımlandığı uzay, hangi durumda  $\emptyset$  olur belirleyiniz.  $a \in \mathfrak{R}^3$  keyfi sabit olmak üzere;  $\mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$  ye  $T_a(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$  şeklinde tanımlı operatörün lineer olduğunu gösteriniz ve  $a = (1, 0, 0)$  olmak üzere  $T_a$  operatörünün çekirdeğini hesaplayınız.

## CEVAPLAR