(2) L bir lin uzay $\|\cdot\|^1$ ve $\|\cdot\|^2$ denk normlar olsunlar. $x \in L$ için

$\|x\|^1$ ve $\|x\|^2$ denk norm old. $\|x\|^2 \leq \alpha . \|x\|^1$ ol. şek. α vardır.

(x_n) dizisi $\|\cdot\|^1$ normuna göre yakınsak yani $x_n \to x$ olsun.

Bu takdirde; $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\forall n \geq n_0$ old.

$\|x_n - x\|^1 < \varepsilon$ ol. şek. $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde

(x_n) dizisi için $\|x_n - x\|'' \leq \alpha . \|x_n - x\|^1 < \alpha . \varepsilon$ yazabiliriz

Yani (x_n), $\|\cdot\|^2$ normuna göre de yakınsaktır.

---

(3) (X,d) kompakt metrik uzayı olsun. O halde X deki $\forall (x_n)$ Cauchy dizisinin yakınsak bir (x_{n_i}) altdizisi vardır. Şimdi (x_n), (X,d) metrik uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde;

$\forall m,n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dur. Cauchy dizileri ~~yakınsak~~ sınırlı old.

(x_n) in (x_{n_i}) altdizisi de yakınsaktır.

Kabul edelim ki $x_{n_i} \to x$ dır. İddia edelim ki $x_n \to x$ dir.

Gerçekten; $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \varepsilon$ olup $x_n \to x$ dir.

O halde (X,d) tam olur.

---

(7) $c\left(|\alpha_1| + |\alpha_2|\right) \leq \|\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)\| = \|(\alpha_1, \alpha_2)\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \Rightarrow$

$c \leq \dfrac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{(|\alpha_1| + |\alpha_2|)}$ dir.

(10) $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ denk iki norm ise bu normlardan birine göre açık olan küme, diğerine göre de açıktır. Topolojiler de açık kümeler vasıtasıyla tanımlandığından denk iki ~~topoloji~~ norm, aynı topolojiyi verir.

⋕ L, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ denk iki norm olsun. $\forall x\in L$ için

$a\cdot\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\cdot\|x\|_1$ ol. şk. $a>0$, $b>0$ vardır.

$\|\cdot\|_1$ den elde edilen topoloji: τ_1
$\|\cdot\|_2$ " " " τ_2 olsun.

$\|\cdot\|_1$ normuna göre x in açık yuvarı $B_1(x)$
$\|\cdot\|_2$ " " x " " " $B_2(x)$ olsun

* $U\in\tau_1$ ve $p\in U$ olsun. $\|x\|_2 \le b\cdot\|x\|_1$ den dolayı

$y\in B_1(x)\subset U$ açık yuvarı için $y\in B_2(x)\subset B_1(x)\subset U$

ol. şekilde $B_2(x)$ açık yuvarı vardır. Böylece $U=\bigcup\{B_2(x): x\in U\}$ old. $U\in\tau_2$ olur.

* $V\in\tau_2$ ise $a\cdot\|x\|_1\le\|x\|_2$ den dolayı benzer şekilde

$y\in B_1(x)\subset B_2(x)\subset V \Rightarrow V=\bigcup\{B_1(x): x\in V\}$ ve

böylece $V\in\tau_1$ olur. Demek ki $\tau_1=\tau_2$ dır. Topolojiler aynı

(11) $x \in L$ için $\|x\|$ ve $\|x\|^1$ denk norm old.

$$\|x\|^1 \leq \alpha . \|x\| \quad \alpha > 0 \text{ vardır}$$

(x_n) dizisi $\|.\|$ normuna göre yakınsak, yani $x_n \to x$ olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_0$ old. $\|x_n - x\| < \varepsilon$ ol. şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

O halde (x_n) dizisi için

$$\|x_n - x\|^1 \leq \alpha . \|x_n - x\| < \alpha \varepsilon$$

old. (x_n) $\|.\|^1$ normuna göre de yakınsaktır.

---

(12) $x \in L$, $\|.\|$ ve $\|.\|^1$ denk old. $\|x\|^1 \leq \alpha . \|x\|$ $\alpha > 0$.

f - dönüşümü $\|.\|$ normuna göre sürekli olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde,

$$\|x - x_0\| < \delta \text{ old.}$$

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad \text{olacak } \delta > 0 \text{ vardır.}$$

O halde $\forall x$ için

$$\|x - x_0\|^1 \leq \alpha . \|x - x_0\| < \alpha . \delta < \delta_1 \text{ old.}$$

$$\|f(x) - f(x_0)\|^1 \leq \alpha \|f(x) - f(x_0)\| < \alpha . \varepsilon < \varepsilon_1$$

ol. şekilde $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. O halde f, $\|.\|^1$ normuna göre süreklidir.

Ödev   İLAVE

Eğer $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her mutlak yakınsak seri yakınsak ise, $(X, \|.\|)$ 'un bir Banach uzayı old. gösteriniz.)