1

$T_1((x_1,x_2)) = (x_2,x_1)$ için

$T_1((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = T_1((x_1+y_1, x_2+y_2)) = (x_2+y_2, x_1+y_1)$

$= (x_2,x_1) + (y_2,y_1) = T_1((x_1,x_2)) + T_1((y_1,y_2))$

$T_1(\alpha(x_1,x_2)) = T_1((\alpha x_1, \alpha x_2)) = (\alpha x_2, \alpha x_1) = \alpha(x_2,x_1) = \alpha T_1((x_1,x_2))$

T_1 - lineerdir.

$\text{Çek } T_1 = \{(x_1,x_2) : T_1((x_1,x_2)) = 0\} = \{(0,0)\}$.

(b) $T_2((x_1,x_2)) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ için;

$T_2((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = T_2((x_1+y_1, x_2+y_2))$

$= (\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2))$

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1 + \alpha y_2)$

$= T_2((x_1,x_2)) + T_2((y_1,y_2))$

$T_2(\lambda(x_1,x_2)) = T_2((\lambda x_1, \lambda x_2))$

$= (\alpha\lambda x_1, \alpha\lambda x_2)$

$= \lambda(\alpha x_1, \alpha x_2)$

$= \lambda T_2((x_1,x_2))$ T - lineerdir.

$\alpha \neq 0$ için $\text{Çek } T_2 = \{(x_1,x_2) : T_2((x_1,x_2)) = 0\} = \{(0,0)\}$

$\alpha = 0 \Rightarrow \text{Çek } T = \mathbb{R}^2$ dir.

(c) ve (d) de T_3 ve T_4 dönüşümleri projeksiyon dön. old. lineerdir.

$\text{Çek } T_3 = \{(x_1,x_2) : T_3((x_1,x_2)) = 0\} = \{(0,x_2)\}$

$\text{Çek } T_4 = \{(x_1,x_2) : T_4((x_1,x_2)) = 0\} = \{(x_1,0)\}$

2) $T: C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ – dönüşümü lineerdir.

$$T(\alpha f + \beta g) = \int_0^1 |(\alpha f + \beta g)(x)|\,dx = \int_0^1 |\alpha f(x) + \beta g(x)|\,dx = \int_0^1 |\alpha f(x)|\,dx + \int_0^1 |\beta g(x)|\,dx$$

$$= \alpha \int_0^1 |f(x)|\,dx + \beta \int_0^1 |g(x)|\,dx = \alpha T(f) + \beta T(g)$$ – T-lineerdir.

3) Çözüm a) $[T(UV)](x) = T(UV)(x) = TUV(x) = (TU)V(x) = [(TU)V](x)$

$$\Leftrightarrow T(UV) = (TU)V$$

b) $[T(U+V)](x) = T[(U+V)(x)] = T[(U(x)+V(x)]$

$$= T(U(x)) + T(V(x))$$

$$= (TU)(x) + (TV)(x)$$

$$= [TU + TV](x)$$

$$\Leftrightarrow T(U+V) = TU + TV$$

c) $[\alpha(TU)](x) = \alpha(TU(x)) = \alpha TU(x)$

$$= (\alpha T)U(x) = [(\alpha T)U](x)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(TU) = (\alpha T)U$$

d) $M_{x_1}, M_{x_2} \in M$ olsun. Bu takdirde $M_{x_1}(y) = x_1 y$ ve $M_{x_2}(y) = x_2 y$

olacak şekilde; $x_1, x_2 \in L$ vardır. Buradan;

$$(M_{x_1} + M_{x_2})(y) = M_{x_1}(y) + M_{x_2}(y)$$

$$= x_1 y + x_2 y = M_{x_1+x_2}(y)$$

$= (x_1 + x_2)y$; $x_1 + x_2 = x_0 \in L$ olduğundan;

$M_{x_1} + M_{x_2} = M_{x_0} \in M$ dir.

$$(\alpha M_{x_1})(y) = \alpha M_{x_1}(y) = \alpha(x_1 y) = (\alpha x_1)y$$

old. $\alpha M_{x_1} \in M$ dir. Dolayısıyla; M, A nın bir altuzayıdır.

4) X, Y, Z aynı bir cisim üzerinde lineer uzaylar ve $T: X \to Y$, $U: Y \to Z$ birer lineer operatör olsun. Bu takdirde $UT: X \to Z$ bileşke dönüşümünün de bir lin. op. old. gösteriniz.

Çözüm: $UT(\alpha x+\beta y) = U(T(\alpha x+\beta y)) = U(\alpha T(x)+\beta T(y))$

$= U(\alpha T(x)) + U(\beta T(y))$

$= \alpha U(T(x)) + \beta U(T(y))$

$= \alpha\, UT(x) + \beta\, UT(y)$ old. $UT: X \to Z$ lin.op.dir.

5) L ve L' aynı bir cisim üzerinde iki lineer uzay ve $T: L \to L'$ bir lin.op. olsun. $A \subset L$ lineer bağımlı bir cümle ise $T(A)$ nın da lin. bağımlı bir cümle dir göst.

Çözüm: $y_1, y_2, \dots, y_n \in T(A)$ olsun. Bu takdirde T- lin. op. old.

$T(x_1) = y_1$, $T(x_2) = y_2$, ..., $T(x_n) = y_n$ ol. şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ vardır.

A- lin. bağımlı old. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ old. en az bir i için $\alpha_i \neq 0$ dır. Kabul edelim ki $\alpha_1 \neq 0$ dır. T- lin. old.

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = T(0) = 0$$

$$\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \dots + \alpha_n T(x_n) = 0$$

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ denklemlerde $\alpha_1 \neq 0$ old.

$y_1, y_2, \dots, y_n$ vektörleri lin. bağımlıdır. O halde $T(A)$ lin. bağımlıdır.

6) $[T(\alpha g_1 + \beta g_2)](x) = \int_0^1 k(x,y)(\alpha g_1 + \beta g_2)(y)\,dy = \int_0^1 k(x,y)\alpha g_1\,dy + \int_0^1 k(x,y)\beta g_2(y)\,dy$

$= \alpha T(g_1(x)) + \beta T(g_2(x))$ old. T- lineerdir.

T-nin sınırlılığına gelince analizdeki anlamda k- sınırlıdır. O halde;

$\|k(x,y)\| \le M$ ol. şek. $M \in \mathbb{R}$ vardır.

$|g(x)| \le \max\{|g(x)| : x \in [0,1]\} = \|g\|$ dır. Böylece

$$\|f\| = \|T(g)\| = \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(x,y) g(y)\,dy \right| \le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)| \cdot |g(y)|\,dy \le M \cdot \|g\|$$

old. T- sınırlıdır

(7) $T((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)) = T(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n)$

$= (0,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n)$

$= (0,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+(0,\beta_2,\dots,\beta_n)$

$= T((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n))+T((\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n))$

$T(\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) = T(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\dots,\lambda\alpha_n) = (0,\lambda\alpha_2,\dots,\lambda\alpha_n)$

$= \lambda(0,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = \alpha T(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ — T-lineerdir.

$\text{Çek}\, T = \{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) : T((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n))=0\} = \{(\alpha_1,0,\dots,0)\}$ dır.

(8) $T((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)) = T(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n)$

$= (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_m+\beta_m)$

$= (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)+(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$

$= T((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n))+T((\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n))$

$T(\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)) = T(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\dots,\lambda\alpha_n) = (\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\dots,\lambda\alpha_m)$

$= \lambda(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m) = \alpha T(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ — T-lineerdir.

(9)-(11) - Ödev.

(10) 4.8. Teoreminin benzeri bir yolla çözülür.

(12) Eğer her $x\in L$ için $a\|x\|\le\|x\|'\le b\|x\|$ ol. şek. $a,b>0$ sayıları varsa; L de bu iki norm birbirine denktir. Denk normlar aynı topolojiyi vereceğinden sonuç açıktır. (

Soru: X, Y normlu uzaylar ve $T: X\to Y$ lineer izomorfi olsun. T ve T^{-1} sürekli ise T ye lineer ve topolojik eşyapılı uzay dönüşümü denir.

Eğer X ile Y ve Y ile Z lin. top. eşyapılı ise X ile Z nin topolojik eşyapılı old. gösteriniz.