KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ

UYGULAMA SORULARI-1

Problem 1. Aşağıdaki **(a)** ve **(b)** de $z \neq 0$ olmak üzere

$$\textbf{(a)}\ \frac{z}{z}=1 \qquad \textbf{(b)}\ \frac{1}{1/z}=z \qquad \textbf{(c)}\ \operatorname{Im}(iz)=\operatorname{Re}(z)$$

olduklarını gösteriniz.

Çözüm

(a) $z=x+iy\neq 0$ olsun.

$$\frac{z}{z}=\frac{x+iy}{x+iy}=\frac{(x+iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$$

(b) $z=x+iy\neq 0$ olsun.

$$\frac{1}{1/z}=\frac{1}{1/x+iy}=\frac{1}{\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}}=\frac{x^2+y^2}{x-iy}=\frac{(x^2+y^2)(x+iy)}{x^2+y^2}=x+iy=z$$

(c) $z=x+iy \Rightarrow iz=ix-y \Rightarrow \operatorname{Im}(iz)=x=\operatorname{Re}(z)$

Problem 2. $z_1\ ve\ z_2$ herhangi iki kompleks sayı olmak üzere

$$\left||z_1|-|z_2|\right|\leq |z_1-z_2|$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$|z_1|=|(z_1-z_2)+z_2|\leq |z_1-z_2|+|z_2|$$
$$\Rightarrow |z_1|-|z_2|\leq |z_1-z_2| \ldots(1)$$

denklemi elde edilir. (1) denkleminde $z_1\ ve\ z_2$ nin rolleri değiştirilirse

$$|z_2|-|z_1|\leq |z_2-z_1|=|z_1-z_2|$$
$$\Rightarrow -(|z_1|-|z_2|)\leq |z_1-z_2|$$
$$\Rightarrow |z_1|-|z_2|\geq -|z_1-z_2| \ldots(2)$$

denklemi elde edilir. (1) ve (2) den

$$-|z_1-z_2|\leq |z_1|-|z_2|\leq |z_1-z_2|$$
$$\Rightarrow \left||z_1|-|z_2|\right|\leq |z_1-z_2|$$

elde edilir.

Problem 3. $|z_3| \neq |z_4|$ olmak üzere

$$\left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{\left||z_3| - |z_4|\right|}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Mutlak değerin özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| = \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_3 + z_4|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{\left||z_3| - |z_4|\right|}$$

elde edilir.

Problem 4. Herhangi $z \in C$ için

(a) $Arg(z\bar{z}) = 0$ **(b)** $\operatorname{Re}(z) > 0$ ise $Arg(z + \bar{z}) = 0$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$z = x + iy$ olarak alalım. Bu durumda $|z|^2 = x^2 + y^2$ olur. Buna göre;

(a) $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \cos\theta = 1, \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$

(b) $\operatorname{Re}(z) = x > 0$ ise $z + \bar{z} = 2x \Rightarrow \cos\theta = 1, \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$

olarak elde edilir.

Problem 5. $\operatorname{Re}(z) > 0 \Leftrightarrow |z - 1| < |z + 1|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\Rightarrow$**:** $z = x + iy$ ve $\operatorname{Re}(z) = x > 0$

olsun. Bu durumda

$$z - 1 = (x - 1) + iy \text{ ve } z + 1 = (x + 1) + iy$$

olarak yazılır. Buna göre

$$|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \text{ ve } |z + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

olarak hesaplanır. Buradan da

$$|z - 1| < |z + 1|$$

olduğu görülür.

$\Leftarrow$**:**

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} < \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \Rightarrow (x - 1)^2 < (x + 1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = \operatorname{Re}(z) > 0$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Problem 6. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) > 0 \Leftrightarrow |z| < 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\Rightarrow$: $z = x + iy \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} > 0 \Rightarrow 1 > x^2+y^2 \Rightarrow 1 > \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

$\Leftarrow$:

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} < 1 \Rightarrow x^2+y^2 < 1 \Rightarrow 1-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} > 0$

elde edilir.

Problem 7. $c \in \Re^+$ olmak üzere $\arg(z_1) = \arg(z_2) \Leftrightarrow c \cdot z_2 = z_1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ olsun.

$\Rightarrow$: $|z_1| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $|z_2| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$ ve $\arg z_1 = \arg z_2$ ise $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ ve $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ olmalıdır. Buradan;

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \text{ ve } \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa bölünürse;

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = c \in \Re^+$$

yazılabilir. Buradan da

$$x_1 = cx_2 \ ve \ y_1 = cy_2$$

dolayısıyla

$$z_1 = x_1 + iy_1 = cx_2 + icy_2 = c(x_2 + iy_2) = cz_2$$

olduğu elde edilir.

$\Leftarrow$: $\tan\theta_1 = \dfrac{y_1}{x_1}$ ve $\tan\theta_2 = \dfrac{y_2}{x_2} \Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)$ ve $\theta_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right)$ dir.

$cz_2 = z_1 \Rightarrow cx_2 + icy_2 = x_1 + iy_1 \Rightarrow cx_2 = x_1 \ ve \ cy_2 = y_1 \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = c \ ve \ \dfrac{y_1}{y_2} = c$ elde edilir.

Buradan

$\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} \Rightarrow \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ ve $\tan^{-1}\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$ yani $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Problem 8. $\sqrt{2}|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$|z|^2 = [\mathrm{Re}\, z]^2 + [\mathrm{Im}\, z]^2$ ($[\mathrm{Re}\, z]^2 = |\mathrm{Re}\, z|^2$ ve $[\mathrm{Im}\, z]^2 = |\mathrm{Im}\, z|^2$ alınabilir) dir.

$$\sqrt{2}|z| \geq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \Rightarrow 2|z|^2 \geq |\mathrm{Re}\, z|^2 + 2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|^2$$

yazabiliriz ve bu eşitsizlikte $|z|^2 = [\mathrm{Re}\, z]^2 + [\mathrm{Im}\, z]^2$ yazılırsa

$$2|\mathrm{Re}\, z|^2 + 2|\mathrm{Im}\, z|^2 \geq |\mathrm{Re}\, z|^2 + 2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|^2$$
$$\Rightarrow |\mathrm{Re}\, z|^2 - 2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|^2 \geq 0$$

ve buradan da

$$(|\mathrm{Re}\, z| - |\mathrm{Im}\, z|)^2 \geq 0$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik doğru olduğundan hipotezde verilen eşitsizlik doğru olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Problem 9. **(a)** $z \in C$ olmak üzere $(1+z)^2 = 1 + 2z + z^2$ olduğunu gösteriniz.

(b) $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ ile gösterilen noktanın, z_1 *ve* z_2 noktaları arasındaki doğru parçasının orta noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm

(a) $z = x + iy$ olsun. Bu durumda

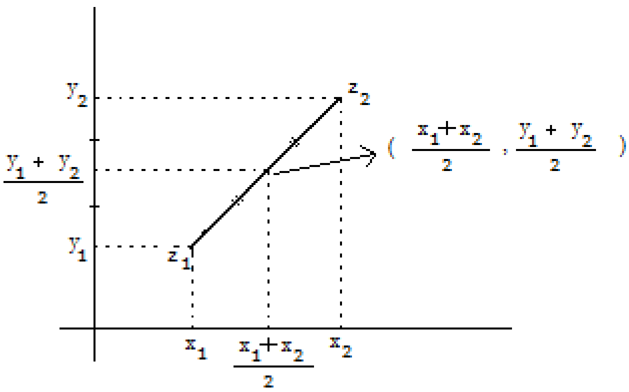
$$[(1+x)+iy]^2 = 1 + 2x + x^2 + 2iy + 2ixy - y^2 = 1 + 2(x+iy) + x^2 + 2ixy + (iy)^2 = 1 + 2z + z^2$$

olduğu elde edilir.

(b) Şekilden de görüldüğü üzere doğru parçasının orta noktası;

$$z = \frac{x_1 + x_2}{2} + i\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}[(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)] = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

dir.



Problem 10. İki karmaşık sayının çarpımı sıfır olduğunda, çarpanlardan en az birinin sıfır olması gerektiğini gösteriniz.

Çözüm

$z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$ olsun. $z_1 z_2 = 0$ ise $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ yada $z_1 = z_2 = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) = (0,0) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0 \text{ ve } x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0 \ldots (1)$$

elde edilir. Eğer x_1 ve y_1 in her ikisi de sıfır değilse, bunların (1) deki aynı zamanda sağlanan homojen denklemlerinin katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 + y_2 = 0$$

ve buradan da $x_2 = y_2 = 0$ çıkar. Demek ki ya $z_1 = 0$ ya $z_2 = 0$ yada her ikisi de sıfır olur.

Problem 11. $z \in C$ ve $z \neq 0$ olmak üzere $z \cdot z' = 1$ olacak şekildeki z' kompleks sayısının teklikle belli olduğunu gösteriniz.

Çözüm

z nin z' de başka z'' gibi bir tersinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda $zz'' = 1$ olmalıdır.

$$z' = z'1 = z'(zz'') = (z'z)z'' = 1z'' = z''$$

yani

$$z' = z''$$

dür.

Problem 12. $z \in C$ sayısının sırf reel veya sanal sayı olması için gerek ve yeter şart $z^2 = (\bar{z})^2$ olmasıdır gösteriniz.

Çözüm

$\Rightarrow$**:** $z = \operatorname{Re} z \Rightarrow z = \bar{z} = \operatorname{Re} z$ olup buradan da $z^2 = [\operatorname{Re} z]^2 = (\bar{z})^2$ elde edilir.

Benzer şekilde

$z = \operatorname{Im} z \Rightarrow z = -\bar{z} = \operatorname{Im} z$ olup buradan da $z^2 = [\operatorname{Im} z]^2 = (-\bar{z})^2 = (\bar{z})^2$ elde edilir.

$\Leftarrow$**:** $z = x + iy$ olsun.

$$z^2 = (\bar{z})^2 \Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 - 2xyi - y^2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = x^2 - y^2 \text{ ve } 2xy = -2xy$$

elde dilir. Buradan da

$$x = 0 \text{ veya } y = 0$$

elde edilir. Yani;

$$z = \operatorname{Re} z \text{ veya } z = \operatorname{Im} z$$

dir.

Problem 13. Aşağıdaki alıştırmalardaki hesaplamaları yaparak $a+bi$ formunda ifade ediniz.

(a) $(3-4i)\cdot(6+2i)$ **(b)** $\dfrac{2-i}{4+i}$ **(c)** i^3-4i **(d)** $\dfrac{(-4-5i)\cdot\overline{(8-4i)}}{\overline{6+2i}}$

Çözüm

(a) $26-18i$ **(b)** $\dfrac{9}{17}-\dfrac{6}{17}i$ **(c)** $-5i$ **(d)** Ödev

Problem 14. Aşağıdaki problemlerde $z=a+bi$ yazıp z nin reel ve sanal kısımları cinsinden sonuçları hesaplayınız.

(a) $\mathrm{Re}(z^2)$ **(b)** $\mathrm{Im}(z^2)$ **(c)** $\mathrm{Re}(2z-3\bar{z}+4)$ **(d)** $\mathrm{Im}(z^2+z)$
(e) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2\bar{z}}{|z|}\right)$ **(f)** $|z+2|$ **(g)** $|z-i|$

Çözüm

(a) $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi \Rightarrow \mathrm{Re}(z^2)=a^2-b^2$
(b) $\mathrm{Im}(z^2)=2ab$
(c) $z'=2z-3\bar{z}+4=2(a+bi)-3(a-bi)+4=-a+4+5bi \Rightarrow \mathrm{Re}(z')=-a+4$
(d) $z'=z^2+z=a^2-b^2+a+(2ab+b)i \Rightarrow \mathrm{Im}(z')=2ab+b$
(e) $z'=\dfrac{2\bar{z}}{|z|}=\dfrac{2a-2bi}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \mathrm{Im}(z')=-\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
(f) $z-i=a+(b-1)i \Rightarrow |z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$

Problem 15. $z\in C$ kompleks sayısı için $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}(z)$ ve $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}(z)$ olduklarını gösteriniz.

Çözüm

$z=x+iy$ olsun.
$\mathrm{Re}(iz)=\mathrm{Re}(xi-y)=-y$ ve $\mathrm{Im}\,z=y$ olduğundan $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}\,z$ elde edilir.
$\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Im}(xi-y)=x$ ve $\mathrm{Re}\,z=x$ olduğundan $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}\,z$ elde edilir.

Problem 16. **(a)** $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ **(b)** $|z_1+z_2+z_3| \leq |z_1|+|z_2|+|z_3|$

(c) $|z_1|-|z_2| \leq |z_1-z_2|$

ifadelerinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm

$z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$ olarak alalım.

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre;

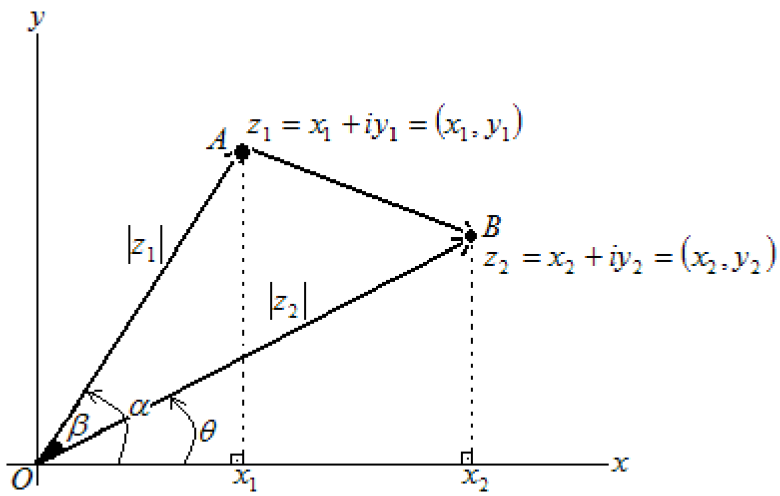
$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 \leq x_1^2+y_1^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}+x_2^2+y_2^2$$
$$\Rightarrow 2x_1x_2+2y_1y_2 \leq 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$
$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$
$$\Rightarrow x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2 \leq x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2$$
$$\Rightarrow 2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2$$
$$\Rightarrow x_1^2y_2^2-2(x_1y_2)(x_2y_1)+y_1^2y_2^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow (x_1y_2-y_1x_2)^2 \geq 0$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik doğru olduğundan istenen elde edilmiş olur.
(a) sonucunu kullanarak **(b)** ve **(c)** yi çözünüz.

Problem 17. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarının konum vektörleri sırasıyla z_1 ve z_2 olmak üzere;

(a) Bu iki vektör arasındaki açı β ise; $\sin\beta$ ve $\cos\beta$ değerlerini hesaplayınız.
(b) AB vektörünü bir kompleks sayı formunda ifade ediniz.
(c) A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm



Yukarıdaki şekil göz önüne alındığında;

(a) $\cos\beta = \cos(\alpha-\theta) = \cos\alpha\cos\theta + i\sin\alpha\sin\theta = \dfrac{x_1}{|z_1|}\dfrac{x_2}{|z_2|} + \dfrac{y_1}{|z_1|}\dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{|z_1||z_2|}$

$\sin\beta = \sin(\alpha-\theta) = \sin\alpha\cos\theta - i\cos\alpha\sin\theta = \dfrac{y_1}{|z_1|}\dfrac{x_2}{|z_2|} - \dfrac{x_1}{|z_1|}\dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{|z_1||z_2|}$

(b) $AB = OB - OA = z_2 - z_1 = (x_2+iy_2)-(x_1+iy_1) = (x_2-x_1)+i(y_2-y_1)$

(c) $|AB| = |(x_2-x_1)+i(y_2-y_1)| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

olarak elde edilir.

Problem 18. $z_1 = x_1+iy_1$ ve $z_2 = x_2+iy_2$ olmak üzere, z_1 ve z_2 nin skaler ve vektörel çarpımları sırasıyla;

(a) $z_1 \circ z_2 = |z_1||z_2|\cos\alpha = x_1x_2+y_1y_2$

(b) $z_1 \times z_2 = |z_1||z_2|\sin\alpha = x_1y_2-y_1x_2$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitliklerin doğruluğunu ispatlayınız.

<u>Çözüm</u>

Bir önceki problemin **(a)** şıkkında elde edilen sonuçları kullanırsak;

(a) $z_1 \circ z_2 = |z_1||z_2|\cos\theta = |z_1||z_2|\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{|z_1||z_2|} = x_1x_2+y_1y_2$

(b) $z_1 \times z_2 = |z_1||z_2|\sin\theta = |z_1||z_2|\dfrac{x_1y_2-y_1x_2}{|z_1||z_2|} = x_1y_2-y_1x_2$

olduklarını elde ederiz.

Problem 19. $z_1 = x_1+iy_1$ ve $z_2 = x_2+iy_2$ kompleks sayıları ile doğrusal veya paralel olmayan iki vektörü gösterelim. Eğer a ve b; $az_1+bz_2=0$ şartını sağlayan reel sayılar ise $a=b=0$ olduğunu gösteriniz.

<u>Çözüm</u>

$az_1+bz_2=0 \Rightarrow a(x_1+iy_1)+b(x_2+iy_2)=0 \Rightarrow (ax_1+bx_2)+i(ay_1+by_2)=0$

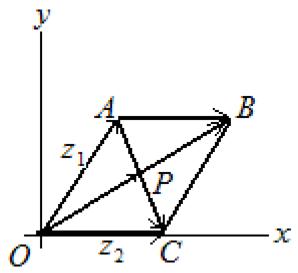
elde edilir. Buradan da

$$ax_1+bx_2=0 \text{ ve } ay_1+by_2=0$$

elde edilir. Bu vektörler doğrusal veya paralel olmadıklarından $\dfrac{y_1}{x_1} \neq \dfrac{y_2}{x_2}$ dir. Dolayısıyla $a=b=0$ bulunur.

Problem 20. Bir paralel kenarın köşegenlerinin birbirini ortaladığını gösteriniz.

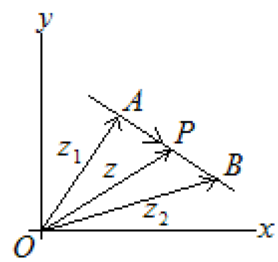
Çözüm



Yukarıdaki şekil göz önüne alındığında;
$z_1 + AC = z_2$ olduğundan $AC = z_2 - z_1$ dir. Bu taktirde $AP = m(z_2 - z_1), 0 \le m \le 1$ yazılabilir. $OB = z_1 + z_2$ olduğundan $OP = n(z_1 + z_2)$, $0 \le n \le 1$ yazılabilir. Ayrıca; $OA + AP = OP$, yani $z_1 + m(z_2 - z_1) = n(z_1 + z_2)$ veya $(1 - m - n)z_1 + (m - n)z_2 = 0$ dır. Bu nedenle bir önceki örnekten; $1 - m - n = 0, m - n = 0$ *veya* $m = 1/2, n = 1/2$ ve böylece P iki köşegenin orta noktası olur.

Problem 21. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm



I. yol AP ve PB doğrusal olduklarından $m, n \in \Re$ için;

$$m \cdot AP = n \cdot PB \text{ veya } m \cdot (z - z_1) = n \cdot (z_2 - z)$$

yazabiliriz. Buradan

$$z = \frac{mz_1 + nz_2}{m + n} \text{ veya } x = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n},\ y = \frac{my_1 + ny_2}{m + n}$$

elde edilir ki buna **simetrik form** denir.

II. yol $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ sırasıyla A ve B nin konum vektörleri olsun. $z = x + iy$, A ve B yi birleştiren doğru üzerindeki herhangi bir P noktasının konum vektörü olsun. Yukarıdaki şekilden;

$$OA + AP = OP \text{ veya } z_1 + AP = z \text{ yani } AP = z - z_1$$

$$OA + AB = OB \text{ veya } z_1 + AB = z_2 \text{ yani } AB = z_2 - z_1$$

AP ve AB doğrusal olduğundan $AP = t \cdot AB$ veya; $z - z_1 = t \cdot (z_2 - z_1), t \in \Re$ ve istenen denklem $z = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1), t \in \Re$ veya $z = (1 - t)z_1 + t \cdot z_2$ dir. $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ nin kullanılmasıyla bu denklem;

$$x - x_1 = t \cdot (x_2 - x_1),\ y - y_1 = t \cdot (y_2 - y_1) \ldots (1)$$

veya

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ldots(2)$$

(1) denklemlerine doğrunun parametrik denklemi, (2) denklemine standart formdaki doğru denklemi denir.

Problem 22. $z=-4-3i$ kompleks sayısının karekökünü hesaplayınız.

Çözüm

$\sqrt{z}=\sqrt{-4-3i}=a+bi \Rightarrow -4-3i=a^2-b^2+2abi$

$\Rightarrow -4=a^2-b^2$ ve $-3=2ab$

$\Rightarrow b=-\dfrac{3}{2a}$ elde edilir. Bu değer $-4=a^2-b^2$ denkleminde yerine yazılırsa ;

$-4=a^2-\dfrac{9}{4a^2} \Rightarrow 4a^4+16a^2-9=0$ bulunur. Bu son denklemde $a^2=t$ yazılırsa

$(2t-1)(2t+9)=0$ buradan da $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ bulunur. Dolayısıyla

$$\sqrt{-4-3i}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\\[2mm] -\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\end{cases}$$

olarak elde edilir.

Problem 23. Aşağıdaki kompleks sayıların her birini trigonometrik olarak ifade ediniz.

(a) $z=-2+2\sqrt{3}i$ **(b)** $z=3-3i$

Çözüm

(a) $z=a+bi$ kompleks sayısı verildiğinde

$$r=\sqrt{a^2+b^2},a=r\cos\theta \ ve \ b=r\sin\theta$$

olmak üzere z kompleks sayısı trigonometrik olarak

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre $z=-2+2\sqrt{3}i$ kompleks sayısı için

$$r=4 \ ve \ \tan\theta=\frac{b}{a}=-\sqrt{3}$$

olup buradan $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ buluruz. O halde

$$-2+2\sqrt{3}i=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

şeklinde trigonometrik olarak ifade ederiz.

(b) $z=3-3i$ kompleks sayısını göz önüne aldığımızda

$$r=3\sqrt{2} \ ve \ \theta=\frac{7\pi}{4}$$

olduğu görülür. Buna göre verilen kompleks sayının trigonometrik gösterimi

$$3-3i=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

olarak bulunur.

Problem 24. Aşağıdaki

$$\left[4\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]\left[\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)\right]$$

çarpımını hesaplayarak bulunan sonucu trigonometrik ve standart biçimde hesaplayınız.

Çözüm

Verilen çarpımın sonucu

$$\left[4\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]\left[\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)\right]=4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

şeklinde trigonometrik olarak bulunur. Bu kompleks sayının standart şekli $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ olarak hesaplanır.

Problem 25. $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$ ifadesinin değerini De Moivre Teoremini kullanarak standart şekilde bulunuz.

Çözüm

De Moivre Teoreminden biliyoruz ki eğer k pozitif bir tamsayı ve

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

trigonometrik şekilde bir kompleks sayı ise o zaman

$$z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$$

dır. $a=\sqrt{3}$ ve $b=1$ olmak üzere

$$r=2 \text{ ve } \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

olup buradan $\theta=\frac{\pi}{6}$ olarak bulunur. O halde $\sqrt{3}+i$ kompleks sayısının trigonometrik şekli

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

olup buna göre De Moivre Teoreminden

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^7=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^7=2^7\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

olarak buluruz. Bu trigonometrik gösterime sahip olan kompleks sayıyı $a+bi$ standart formunda yazacak olursak istenilen sonuç

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^7=-64\sqrt{3}-64i$$

olarak bulunur.

Problem 26. $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ kompleks sayısının küp köklerini hesaplayınız.

Çözüm

Her bir $n\geq 1$ tamsayısı için sıfırdan farklı herhangi bir $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ kompleks sayısı C de tam olarak n farklı köke sahiptir ve bunlar $k=0,1,2,...,n-1$ için

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

olarak verilir.

Buna göre verilen kompleks sayıyı trigonometrik formda yazalım.

$$r=1,\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ve\ \sin\theta=\frac{1}{2}$$

olup buradan $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ buluruz. O halde

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

dır. Böylece $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ küp kökleri

$$\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}$$
$$\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}$$
$$\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}$$

olarak bulunur.

Problem 27. $z^3-i=0$ denkleminin çözümleri olan bütün kompleks sayıları bulunuz. Bulunan bu kompleks sayıları $a+bi$ şeklinde standart formda yazınız.

Çözüm

Öncelikle aşağıdaki gibi trigonometrik formda yazalım.

$$z^3-i=0\Rightarrow z^3=i=(0+i)=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

olup

$$z=1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right)$$

eşitliğinden $k=0,1,2$ için aşağıdaki değerler bulunur.

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

böylece istenen elde edilmiş olur.

Problem 28. C kompleks düzleminde bulunan $G=\{z\in C:1<\operatorname{Im}z<4\}$ sonsuz şeridinin açık küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$z_0\in G$, G de keyfi bir nokta olsun. Bu taktirde $1<\operatorname{Im}z_0<4$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik bazı pozitif δ sayıları için $1+\delta<\operatorname{Im}z_0<4-\delta$ olduğunu ifade eder. $|z-z_0|<\delta$ ise bu taktirde $|\operatorname{Im}(z-z_0)|<\delta$ olur ve sonuç olarak $1<\operatorname{Im}z<4$ olduğu elde edilir. Böylece G kümesi bir $\Omega(z_0,\delta)$ açık diskini içerir. Ayrıca verilen kümenin grafiği çizilerek açık bir küme olduğu açıkça görülebilir.

Problem 29. Her $n\in N$ için $G_n=\Omega\left(0,\frac{1}{n}\right)$ olsun. $\bigcap_{n\in N}G_n$ kesişimini bulunuz. Sonsuz sayıda açık kümenin kesişiminin açık olması gerekmediğini gösteriniz. C de açık kümelerin bir koleksiyonunun tüm kesişimlerinin ne açık ne de kapalı olması gerekmediğine dair bir örnek veriniz.

Çözüm

$\bigcap_{n\in N}G_n$ kesişimi sadece 0 noktasından ibarettir. Gerçekten, bu nokta her G_n kümesinde içerilir ve $n>|z|^{-1}$ için kompleks düzlemin diğer herhangi bir z noktası G_n kümelerinde içerilmez. Tek nokta kümesi herhangi bir açık disk içermediğinden açık küme değildir. Bir önceki örnekte kesişim kapalı bir kümedir. Bu, açık kümelerin sonsuz kesişimi için her zaman geçerli olan bir durum değildir. Örneğin; G_n kümelerinin $\left\{z\in C:-1<\operatorname{Im}z<\frac{1}{n}\right\}$ açık şeritleri olduğunu farz edelim. G_n kümelerinin kesişimleri $\{z\in C:-1<\operatorname{Im}z\leq 0\}$ yarı açık şerididir.

Problem 30. A,C nin boş olmayan bir alt kümesi ve A^* kümesini $A^* = \{w \in C : \overline{w} \in A\}$ şeklinde tanımlayalım. Böylece A^* kümesi A nın reel eksene göre yansımasından elde edilir. A^* kümesinin açık küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm

A nın açık olduğunu kabul edelim ve $z \in A^*$ olsun. Bu taktirde $\overline{z} \in A$ ve A açık olduğundan $D(\overline{z}, r) \subseteq A$ olacak şekilde bazı $r > 0$ sayıları vardır. İddia ediyoruz ki $D(z,r) \subseteq A^*$ dır. Bunu görmek için $w \in D(z,r)$ alalım. Bu taktirde $|w - z| < r$ ve $|\overline{w} - \overline{z}| = |\overline{(w - z)}| = |w - z| < r$ dir. Bu $\overline{w} \in D(\overline{z}, r) \subseteq A$ olduğunu belirtir ve böylece $w \in A^*$ yani $D(z,r) \subseteq A^*$ dır. bu nedenle A açıktır.

Problem 31. a ve z kompleks sayıları $D(0,1) = \{z : |z| < 1\}$ birim yuvarının elemanları ise $w = \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}\,z}$ kompleks sayısının da bu birim yuvarın elemanı olacağını gösteriniz.

Çözüm

$$|w|^2 = w\overline{w} = \left(\frac{z - a}{1 - \overline{a}\,z}\right)\left(\frac{\overline{z} - \overline{a}}{1 - a\,\overline{z}}\right) = \frac{|z - a|^2}{|1 - \overline{a}\,z|^2}$$

$$|z - a|^2 = (a - z)\overline{(a - z)} = |a|^2 + |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}\,z)$$

ve

$$|1 - \overline{a}\,z|^2 = (1 - \overline{a}\,z)\overline{(1 - \overline{a}\,z)} = 1 + |a|^2|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}\,z)$$

yazabiliriz. Böylece;

$$1 - w\overline{w} = \frac{1 - |z|^2 - |a|^2 + |a|^2|z|^2}{|1 - \overline{a}\,z|^2} = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \overline{a}\,z|^2} > 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.