Problem 32. C kompleks düzlemindeki boş olmayan A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$dist(A,B) = \inf\{|z-w| : z \in A, w \in B\}$$

olarak tanımlanır.

B kapalı ve $a \notin B$ ise $dist(\{a\},B) > 0$ olduğunu gösteriniz.(Burada $\{a\}$ tek nokta kümesidir.)

$dist(A,B) = 0$ şartını sağlayan ayrık A ve B kümelerine örnek veriniz. Bu durum A ve B nin kapalı kümeler olması durumunda mümkün müdür?

Çözüm

$dist(\{a\},B) = 0$ olduğunu kabul edelim. inf tanımından her $\varepsilon > 0$ için $dist(a,b_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak şekilde $b_\varepsilon \in B$ sayısı vardır. Başka bir deyişle a merkezli her disk B nin bazı elemanlarını ihtiva eder. Fakat bu taktirde B nin tümleyeni açık değildir ve sonuç olarak B kapalı değildir.

$A = D(0,1)$ ve $B = D(2,1)$ açık disklerini göz önüne alalım. Bu taktirde $dist(A,B) = 0$ ve $A \cap B = \phi$ dir.

İkinci sorunun evet olacaktır, fakat A ve B kapalı kümeler olarak alınırlarsa örnek daha karmaşık hale gelir. En basit şekilde söylemek gerekirse A ve B , sınırları sonsuzda birbirine yakınsayan kapalı sınırsız bölgelerdir (örneğin $f_1(x) = x^{-1}$ ve $f_2(x) = -x^{-1}$ fonksiyonlarının grafiklerini göz önüne alalım.)

Problem 33. 0 noktasının $S = \left\{ z_n = \frac{1}{n} + i\frac{1}{n} : n \in N \right\}$ kümesinin elemanı olmadığını fakat S nin bir limit noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$0 \notin S$ olduğu açıktır. $U_\delta^{'}(0)$, 0 ın keyfi delinmiş komşuluğu olsun, bu taktirde;

$$|0 - z_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$$

dir. Başka bir deyişle, yeterince büyük n sayısı için S nin z_n noktası $U_\delta^{'}(0)$ delinmiş komşuluğuna aittir.

Problem 34. Açık/Kapalı diskin açık/kapalı olacağını gösteriniz.

Çözüm

Açık Diskler: İddia: $B_r(z_0)$ açıktır.
$z \in B_r(z_0)$ ve $\rho = r - |z - z_0|$ alalım. Bu taktirde $|z - z_0| < r$ olduğundan $\rho > 0$ ve $\zeta \in B_\rho(z_0)$ için,

$$|\zeta - z_0| \le |\zeta - z| + |z - z_0| < \rho + |z - z_0| = r$$

olur. Böylece

$$B_\rho(z) \subset B_r(z_0)$$

olduğu elde edilir.

Kapalı Diskler: İddia: $C - \overline{B_r}(z_0)$ açıktır.
$z \in C - \overline{B_r}(z_0)$ ve $\rho = |z - z_0| - r$ alalım. Bu taktirde $|z - z_0| > r$ olduğundan $\rho > 0$ ve $\zeta \in B_\rho(z)$ için,

$$|z_0 - \zeta| \ge |z_0 - z| - |\zeta - z| > |z_0 - z| - \rho = r$$

Olur. Böylece

$$B_\rho(z) \cap B_r(z_0) = \phi$$

olduğu elde edilir.

Problem 35. *C* nin aşağıdaki altkümelerinden hangileri açık, hangileri kapalıdır?

(a) $S = \{z : |z| < 1\}$ **(b)** $S = \Re$

(c) $S = \{z : Bazı\ n \ge 1\ için\ z^n = 1\}$ **(d)** $S = \{z : z\ reel\ ve\ 0 \le z < 1\}$

(e) $S = \{z : z\ reel\ ve\ 0 \le z < 1\}$

Çözüm

(a) *S* açıktır. $z \in S$ ve $\varepsilon = 1 - |z|$ olsun. Bu taktirde $D(z, \varepsilon) \subset S$ olur.

(b) *S* kapalıdır. $z \in C - \Re$ ve $\varepsilon = |\operatorname{Im} z|$ olsun. Bu taktirde $D(z, \varepsilon) \subset C - \Re$ ve böylece $C - \Re$ açık olur.

(c) *S* ne açık ne de kapalı kümedir. $z = 1$ ve $w = e^i$ olsun. Bu taktirde birimin (1 in) kökleri birim çemberde yoğun olduğundan hem *z* hem de *w S* nin sınır noktalarıdır, burada $z \in S$ ve $w \notin S$ dir.

$w \notin S$ olduğunu görmek için; aksini yani $w \in S$ olduğunu kabul edelim. Bu $w^n = 1$ olacak şekilde bir $n \ge 1$ pozitif tamsayısı bulabileceğimizi ifade eder. Dolayısıyla

$$w^n = 1 \Rightarrow (e^i)^n = 1 \Rightarrow e^{in} = 1 \Rightarrow \cos n + i \sin n = 1 \Rightarrow \sin n = 0 \Rightarrow n = 2\pi k \Rightarrow \pi = \frac{n}{2k} \in Q, k \in N$$

olduğu elde edilir ki bu bir çelişkidir.

(d) *S* ne açık ne de kapalı kümedir. $z = 0$ ve $w = 1$ alalım. Bu taktirde hem *z* hem de *w S* nin sınır noktalarıdır, burada $z \in S$ ve $w \notin S$ dir.

(e) S kapalıdır. $z \in C - S = C - [0,1]$ olsun ve

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} |\operatorname{Im} z| & if \;\; z \in C - \Re \\ \min\{|z|, |z-1|\} & if \;\; z \in \Re - [0,1] \end{Bmatrix}$$

Alalım. Bu taktirde $D(z,\varepsilon) \subset C - [0,1]$ ve böylece $C - [0,1]$ açıktır.

Problem 36. Aşağıda verilmiş olan C nin altkümelerinden hangileri bağlantılıdır. Eğer X bağlantılı değilse bileşenlerini bulunuz.

(a) $X = \{z : |z| \le 1\} \cup \{z : |z-2| < 1\}$ **(b)** $X = [0,1) \cup \left\{1 + \frac{1}{n} : n \ge 1\right\}$

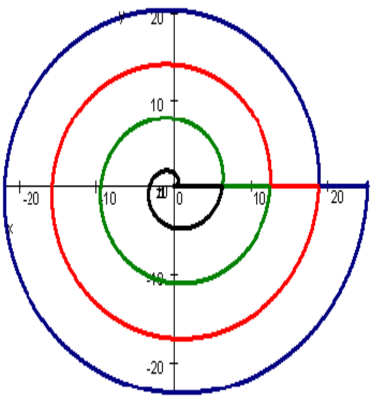
(c) $A = [0,\infty)$ ve $B = \{z = re^{i\theta} : r = \theta, 0 \le \theta < \infty\}$ olmak üzere $X = C - (A \cup B)$

Çözüm

(a) X bağlantılıdır. Gerçekte $A = \{z : |z| \le 1\}$ kümesinin ve $B = \{z : |z-2| < 1\}$ kümesinin parçalı bağlantılı olduğunu göz önüne alarak X kümesinin parçalı bağlantılı olduğunu göstermeliyiz. Eğer $z \in A$ ve $w \in B$ ise $\gamma(t) : [0,1] \to X$ yı

$$\gamma(t) = \begin{Bmatrix} (1-t)z + t\operatorname{Re} z & 0 \le t \le 1 \\ (2-t)\operatorname{Re} z + (t-1)\operatorname{Re} w & 1 \le t \le 2 \\ (3-t)\operatorname{Re} w + (t-2)w & 2 \le t \le 3 \end{Bmatrix}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. $z = 1 \in X$ olduğundan $\operatorname{Re} z$ yi $\operatorname{Re} w$ ya taşıyabiliriz.



(b) X bağlantılı değildir ve X in bağlantılı bileşenleri;

$$[0,1), \{2\}, \left\{\frac{3}{2}\right\}, \left\{\frac{4}{3}\right\}, \ldots, \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}, \ldots$$

dir.

(c) X bağlantılı değildir ve X in ilk dört bağlantılı bileşeni yandaki şekilde gösterilmiştir.

Problem 37. $z=(1+i)^{-5}$ olmak üzere; z^n sayısını reel değerli yapan n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Çözüm

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ olmak üzere $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ dir. $z_1=1+i$ olarak alınırsa $r_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ve $\theta_1=\arg z_1=\arctan\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$ olarak elde edilir. Böylece $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ olarak bulunur. Dolayısıyla;

$$z^n=\left[(1+i)^{-5}\right]^n=\left[2^{-5/2}\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\right)\right]^n=2^{-5n/2}\left[\cos\left(\frac{-5n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-5n\pi}{4}\right)\right]$$

olarak elde edilir. $z^n\in\Re$ olması istenildiğinden

$$\sin\left(\frac{-5n\pi}{4}\right)=0\Rightarrow\frac{-5n\pi}{4}=k\pi,k\in Z$$

ve n pozitif tamsayı olduğundan; $n=4,8,12,...$ dir.

Problem 38. $\sqrt[3]{7-i}$ kompleks sayısının tüm köklerini bulunuz. Bu kökleri kompleks düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],k\in Z$$

ve

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

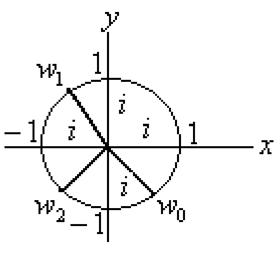
olduğundan;

$$w_k=\sqrt[3]{7-i}=\sqrt[3]{\sqrt{49+1}}\left[\cos\left(\frac{\arctan(-1/7)+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\arctan(-1/7)+2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_k=\sqrt[3]{5}\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{-\arctan(1/7)+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\arctan(1/7)+2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_k=\sqrt[3]{5}\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-0.0476+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-0.0476+\frac{2k\pi}{3}\right)\right],k=0,1,2$$

ve $|w_k|=\sqrt[3]{5}\sqrt[6]{2}\approx1.919$ olarak elde edilir. Dolayısıyla verilen kompleks sayının kökleri aşağıdaki değerler olarak hesaplanır ve bu kökler kompleks düzlemde aşağıda verilen şekildeki gibi gösterilir.



$$w_0=1.919[\cos(0.0476)-i\sin(0.0476)]=1.917-0.091i$$
$$w_1=1.919[\cos(1.116)-i\sin(1.116)]=-0.879+1.706i$$
$$w_2=1.919[\cos(1.334)+i\sin(1.334)]=-1.038-1.614i$$

Problem 39. $z=\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{106}$ olmak üzere z' yi $x+iy$ formunda yazarak $|z|$ ve $Arg(z)$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$ olduğunu göz önüne alırsak;

$z_1=-\sqrt{3}+i \Rightarrow r_1=\sqrt{3+1}=2,\theta_1=\arctan\left(-1/\sqrt{3}\right)=-\pi/6$

$z_2=1-i \Rightarrow r_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\theta_2=\arctan(-1/1)=-\pi/4$

ve $\theta_1-\theta_2=\pi/12$ olduğundan;

$$z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{106}=\left[\sqrt{2}\left(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)\right)\right]^{106}=2^{53}\left[\cos(106\pi/12)+i\sin(106\pi/12)\right]$$

$$\Rightarrow z=2^{53}\left[\cos\left(8\pi+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(8\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2^{53}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2^{52}\left(-\sqrt{3}+i\right)$$

olarak elde edilir. Böylece $|z|=2^{53}$ ve $Arg(z)=\dfrac{5\pi}{6}$ olarak hesaplanır.

Problem 40. $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$ ifadesini $x+iy$ formunda yazınız.

Çözüm

$z=(1+i)^{10}$ olarak alınır ve $\operatorname{Re} z=x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}), z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ oldukları göz önüne alınırsa;

$$(1+i)^{10}+(1-i)^{10}=2\operatorname{Re}\left[(1+i)^{10}\right]=2\operatorname{Re}\left[\left(\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right)\right)^{10}\right]=2\left[2^{10/2}\cos(10\pi/4)\right]$$

$\Rightarrow (1+i)^{10}+(1-i)^{10}=2^6\cos(5\pi/2)=0$ olarak elde edilir.

Problem 41. $z^2-(7+i)z+24+7i=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm

$\sqrt{z}=\pm\left[\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}}+(\operatorname{sgn}(y))\,i\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}\right]$ olduğu göz önüne alınırsa;

$z^2-(7+i)z+24+7i=0$ denklemi için,

$$z=\frac{7+i\pm\sqrt{(7+i)-4(24+7i)}}{2}=\frac{7+i\pm\sqrt{2}\sqrt{-24-7i}}{2}$$

$$=\frac{7+i\pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{25-24}{2}}-i\sqrt{\frac{25+24}{2}}\right)}{2}$$

$$=\frac{7+i\pm(1-7i)}{2}=\begin{cases}4-3i\\3+4i\end{cases}$$ olarak hesaplanır.

Problem 42. Kompleks düzlemde, aşağıdaki bağıntıları sağlayan z noktalarının kümesini geometrik olarak tanımlayınız.

(a) $z_1, z_2 \in C$ olmak üzere; $|z-z_1|=|z-z_2|$ **(b)** $1/z=\overline{z}$

(c) $\operatorname{Re} z=3$ **(d)** $c\in\Re$ olmak üzere $\operatorname{Re} z>c$

(e) $|z|=\operatorname{Re}(z)+1$ **(f)** $c\in\Re$ olmak üzere $\operatorname{Im} z=c$

Çözüm

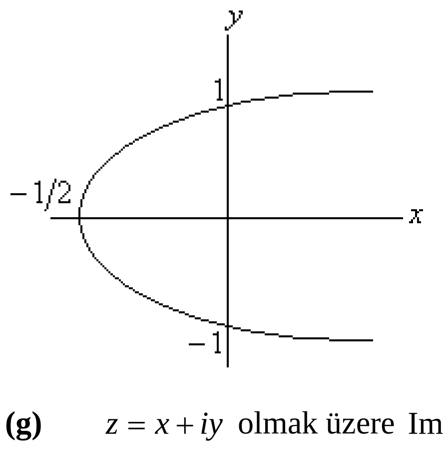
(a) Verilen bağıntıyı sağlayan z noktalarının kümesi C de, z_1 ve z_2 ye eşit uzaklıkta bulunan bütün noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır. Veya denk olarak C de, z_1 ve z_2 yi birleştiren doğru parçasının normali üzerindeki noktalardır.

(b) $z=x+iy$ olmak üzere $\overline{z}=1/z\Rightarrow\overline{z}z=1\Rightarrow|z|^2=1\Rightarrow x^2+y^2=1$ elde edilir. Buda orijin merkezli birim çemberdir.

(c) $z=x+iy$ olmak üzere $\operatorname{Re} z=x=3$ olan doğrudur.

(d) $z=x+iy$ olmak üzere $\operatorname{Re} z=x>c$ elde edilir. Dolayısıyla bahsi geçen kompleks sayılar kümesi; reel kısımları c sayısından büyük olan büyük olan tüm kompleks sayıların oluşturduğu açık, yarı düzlemdir.

(f) $z=x+iy$ olmak üzere;



$$|z|=\operatorname{Re}(z)+1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=x+1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=x^2+2x+1\Rightarrow y^2=2x+1$$

elde edilir. Buda yandaki şekilde gösterildiği gibi bir parabol belirtir.

(g) $z=x+iy$ olmak üzere $\operatorname{Im} z=y=c$ doğrusudur.