Problem 43. C kompleks düzleminde verilen

(a) $A=\{z:\operatorname{Re} z\geq \operatorname{Im} z\}$ **(b)** $B=\{z:|z|<1 ve |z-i|<1\}$

(c) $C=\{z=re^{i\theta}:1<r<2 ve -\pi/3\leq\theta\leq 2\pi/3\}$

kümeleri için açık, kapalı ,ne açık ne de kapalı ,bağlantılı olup olmadıklarını belirleyiniz. Her bir kümeyi veya kümelerin sınırlarını parametrik olarak ifade ediniz.

Çözüm

(a) $z=x+iy$ olsun. Aradığımız küme $x\geq y$ eşitsizliğini sağlayan kompleks sayıların oluşturduğu kümedir. Bu küme, (x,y)- düzleminde $y=x$ doğrusunun sağ-alt tarafında kalan kapalı bağlantılı bir bölgedir. Bu bölgenin sınırı $y=x$ doğrusudur ve t keyfi bir reel sayı olmak üzere parametrik denklemi $x=t$, $y=t$ dir. Böylece $z=t+it=t(1+i)$ dir. Alternatif olarak s bir keyfi reel sayı olmak üzere; sınır $z=s\exp(\pi i/4)$ ile verilir.

(b) $B=\{z:|z|<1 ve |z-i|<1\}$ kümesi; kompleks düzlemde, biri merkezi orijinde diğeri merkezi $(0,1)$ noktasında olan iki birim diskin kesişimi olup bu bölge açık-bağlantılı bir bölgedir. Bu disklerin sınırları (ki bunlar B bölgesine ait değildirler)

$|z|=1, |z-i|=1, |z|^2=1, |z-i|^2=1, z\bar{z}=1, 1=(z-i)(\bar{z}+i)=z\bar{z}-i\bar{z}+iz+1$

$z\bar{z}=1, -i\bar{z}+iz+1=0$, $x^2+y^2=1, -2y+1=0$, $y=1/2$, $x=\pm\sqrt{3}/2$

ise $(\sqrt{3}/2,1/2)$ ve $(-\sqrt{3}/2,1/2)$ noktalarında kesişirler.

- Bölgenin üst sınırı $|z|=1$ çemberi üzerinde kalır ve saatin dönme yönünün tersi yönünde $(\sqrt{3}/2,1/2)$ noktasını $(-\sqrt{3}/2,1/2)$ noktasına birleştiren yoldur. Parametrik gösterimi ise $\pi/6\leq t\leq 5\pi/6$ olmak üzere $z=\exp(it)$ dir.
- Bölgenin alt sınırı $|z-i|=1$ çemberi üzerinde kalır ve saatin dönme yönünün tersi yönünde $(-\sqrt{3}/2,1/2)$ noktasını $(\sqrt{3}/2,1/2)$ noktasına birleştiren yoldur. Parametrik gösterimi ise $7\pi/6\leq s\leq 11\pi/3$ olmak üzere $z=i+\exp(is)$ dir.

(c) $C=\{z=re^{i\theta}:1<r<2 ve -\pi/3\leq\theta\leq 2\pi/3\}$ kümesi bağlantılı fakat ne açık ne de kapalı bir bölgedir. Bu küme,

- sağ taraftan; merkezden $\pi/3$ açısıyla çıkan ışın tarafından
- sol taraftan; merkezden $2\pi/3$ açısıyla çıkan ışın tarafından

sınırlandırılmış, dış yarıçapı 2 ve iç yarıçapı 1 olan orijin merkezli bir halkanın bir parçasıdır.

- Halkanın çembersel kenarı C nin bir parçası değildir
- Halkanın doğrusal kenarı C nin bir parçasıdır
- Halkanın köşeleri (ki hiçbiri C de değildir), halkanın sınırı çevresindeki(saatin dönme yönünün tersi yönünde);

$A=\exp(\pi i/3)$, $B=2\exp(\pi i/3)$, $C=2\exp(2\pi i/3)$ ve $D=2\exp(\pi i/3)$

noktalarıdır.

AB kenarı; $1 \le s \le 2, z = s\exp(\pi i/3)$ ile parametrize edilir.
BC kenarı; $1 \le t \le 2, z = 2\exp(t\pi i/3)$ ile parametrize edilir.
CD kenarı; $0 \le u \le 1, z = (2-u)\exp(2\pi i/3)$ ile parametrize edilir.
DE kenarı; $0 \le v \le 1, z = \exp((2-v)\pi i/3)$ ile parametrize edilir.

Problem 44. $x^6 = -64$ denklemini sağlayan tüm x kompleks sayılarını bulunuz.

Çözüm

❖ $x^6 = -64$ denklemini $x^6 = -64 = 2^6 i^6$ şeklinde yazabiliriz. Bu son denklemde, bazı y $(y = x/2i)$ kompleks sayıları için $x = 2iy$ yazalım. Bu taktirde $x^6 = 2^6 i^6 y^6 = 2^6 i^6$ elde edilir. Buradan $y^6 = 1$ bulunur. Dolayısıyla $k \in Z$ olmak üzere $y^6 = 1$ denkleminin tüm kökleri $y = \exp\left(\frac{2\pi i k}{6}\right)$ olarak bulunur. Böylece verilen denklemin kökleri $x = 2i\exp\left(\frac{2\pi i k}{6}\right), k = 0,1,2,3,4,5.$ olarak hesaplanır.

❖ Alternatif olarak çarpanlara ayırma yöntemi ile;
$x^6 + 64 = (x^3 + 8i)(x^3 - 8i) = 0 \Rightarrow x^3 = -8i \; veya \; x^3 = 8i$ olarak bulunur. Burada $(2i)^3 = 2^3 i^3 = -8i$ olduğu göz önüne alınırsa $x^3 = 8i$ denkleminin bir kökünün $-2i$ ve $x^3 = -8i$ denkleminin bir kökü $2i$ dir. Bu taktirde w birimin kökleri olmak üzere $x^3 = 8i$ denkleminin kökleri $-2i, -2iw \; ve \; -2iw^2$ ve $x^3 = -8i$ denkleminin kökleri $2i, 2iw \; ve \; 2iw^2$ olarak hesaplanır.

❖ Alternatif olarak;

$$r > 0, \theta \in \Re \text{ olmak üzere } x = r\exp(i\theta)$$

kutupsal formu kullanabiliriz. Bu taktirde;
$x^6 = (r\exp(i\theta))^6 = r^6\exp(6i\theta) = -64 = 64\exp(i\pi)$
yazılabilir. Böylece $k \in Z$ olmak üzere $r^6 = 64 \Rightarrow r = 2$ ve $6\theta = \pi + 2k\pi$ olarak bulunur. Böylece kökler;

$$x = 2\exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{6}\right), k = 0,1,2,3,4,5$$

olarak hesaplanır. Sırasıyla $x = 2\exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{6}\right)$ denkleminde sırasıyla $k = 0,1,2,3,4,5$ değerleri yazıldığında kökler;
$\sqrt{3} + i, 2i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, -2i, \sqrt{3} - i$
olarak elde edilir.

Problem 45. α reel olmayan bir kompleks sayı olmak üzere; bir reel polinomun $x-\alpha$ çarpanına sahip olduğunu kabul edelim.

Bu polinomun $x^2-2\operatorname{Re}(\alpha)x+|\alpha|^2$ formunda bir reel çarpanının bulunduğunu ispatlayınız.

$x=i$ nin $x^4-4x^3+6x^2-4x+5=0$ polinomunun bir kökü olduğunu kanıtlayınız ve bu polinomun tüm köklerini bulunuz.

Çözüm

Sözü edilen reel polinom $p(x)$ ve bunun bir çarpanı $x-\alpha$ ise bu taktirde polinomun bir çarpanı $x=\alpha$ dır ve $p(\alpha)=0$ dır. Polinomun katsayıları reel sayılar olduğundan kompleks eşleniğinin alınmasıyla $p(\overline{\alpha})=0$ elde edilir. Ayrıca polinomun bir çarpanı $x-\alpha$ olduğundan bazı kompleks $q(x)$ polinomları için $p(x)=(x-\alpha)q(x)$ yazabiliriz. Elde edilen son denklemde $x=\overline{\alpha}$ yerine koyması yapılırsa;

$$0=p(\overline{\alpha})=(\overline{\alpha}-\alpha)q(\overline{\alpha})$$

olduğu elde edilir.

Fakat α reel sayı olmadığından $\overline{\alpha}-\alpha=-2i\operatorname{Im}(\alpha)\neq 0$ yazabiliriz, buradan $0=q(\overline{\alpha})$ olduğunu elde ederiz böylece $q(x)$ poinomunun $x=\overline{\alpha}$ köküne sahip olduğu görülür ve $r(x)$ bir polinom olmak üzere $q(x)$ polinomu $q(x)=(x-\overline{\alpha})r(x)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. Bu taktirde;

$$\begin{aligned}p(x)&=(x-\alpha)q(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})r(x)\\&=\left(x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\right)r(x)=\left(x^2-2\operatorname{Re}(\alpha)x+|\alpha|^2\right)r(x).\end{aligned}$$

Böylece $p(x)$ polinomunun $x^2-2\operatorname{Re}(\alpha)x+|\alpha|^2$ reel çarpanına sahip olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $p(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+5=0$ polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomda $x=i$ yerine koymasını yaparsak

$$p(i)=i^4-4i^3+6i^2-4i+5=1+4i-6-4i+5=0$$

elde ederiz böylece $x=i$ nin $p(x)$ polinomunun bir kökü (ve dolayısıyla $x-i$, $p(x)$ polinomunun bir çarpanı olduğu) olduğu anlaşılır.

Yukarıdaki tartışmalardan, $p(x)$ reel ve kök reel olmadığından; $p(x)$ polinomu $x^2-2\operatorname{Re}(i)x+|i|^2=x^2+1$ çarpanına sahiptir. Şimdi;

$$-4x^3-4x=-4x(x^2+1) \text{ ve } x^4+6x^2+5=(x^2+1)(x^2+5)$$

yazalım, böylece;

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+5=(x^2+1)(-4x)+(x^2+1)(x^2+5)=(x^2+1)(x^2-4x+5)$$

elde ederiz.

$p(x)$ in kökleri;

$$x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1=(x-2)^2-(i)^2=(x-2-i)(x-2+i)$$

polinomunun kökleri ve $x=\pm i$ kökleridir.

Böylece bahsi edilen kökler;
$x^4-4x^3+6x^2-4x+5=(x^2+1)(x^2-4x+5)=(x-i)(x+i)(x-2-i)(x-2+i)$
çarpanlarına karşılık gelen $i,-i,2+i$ *ve* $2-i$ kökleridir.

Problem 46. $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ eşitliğini kullanarak $\cos\frac{\pi}{16}$ değerini hesaplayınız.

Çözüm

$$\left(\cos\frac{z}{2}+i\sin\frac{z}{2}\right)^2=\cos z+i\sin z\left\{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}+2i\cos\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2}=\cos z+i\sin z\right\}$$

eşitliğinden

$$\sin z=2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} \text{ ve } \cos z=\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2} \qquad (1)$$

olduğunu elde ederiz.

$$\cos\frac{z}{2}+i\sin\frac{z}{2}\in\{z:|z|=1\}$$

olduğundan $\cos^2\frac{z}{2}+\sin^2\frac{z}{2}=1$ yazabiliriz. Bunu (1) eşitliğinde yerine yazacak olursak

$$\cos\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{\cos z+1}{2}}$$

olduğunu elde ederiz. Elde edilen bu son formülü $\cos\frac{\pi}{4}$ değeri için iki kez üst üste uygularsak

$$\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2}}+2}}{2}$$

olarak hesaplanır.

Problem 47. $x\neq 0$ olmak üzere;

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$

olduklarını gösteriniz.

Çözüm

$$S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx+i\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx+i\sin kx\right)$$

toplamını göz önüne alalım. Bu taktirde;

$$S=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$$

dir.

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

formülünü kullanarak S yi aşağıdaki gibi şekilde hesaplayabiliriz.

$$S=e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}\left(e^{-\frac{inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}\right)}=e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}=e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Böylece

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx+i\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin reel ve sanal kısımlarının eşitlenmesiyle istenen elde edilir.

Problem 48. $\cos 5\theta$ yı ve $\sin 5\theta$ yı sırasıyla $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^5&=\cos^5\theta+i\binom{5}{1}\cos^4\theta\sin\theta-\binom{5}{2}\cos^3\theta\sin^2\theta\\&\quad-i\binom{5}{3}\cos^2\theta\sin^3\theta+\binom{5}{4}\cos\theta\sin^4\theta+i\sin^5\theta\\&=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta\\&\quad+i\left(5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca De Moivre Teoremi gereği

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$$

olduğu bilinmektedir. O halde

$$\cos 5\theta=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$$

ve

$$\sin 5\theta=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta$$

olarak elde edilir.

Problem 49. Aşağıdaki fonksiyonların reel ve sanal kısımlarını bulunuz.
(a) z^2+i **(b)** $\sqrt{z+1}$ **(c)** z^n **(d)** $\sqrt[n]{z}$
(e) $2z^2-3z+5$ **(f)** $(z-1)/(\bar{z}+1)$

Çözüm

(a) $z=x+iy$ olmak üzere $f(z)=z^2+i$ fonksiyonunu

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

formunda yazabiliriz. Böylece verilen fonksiyonun reel ve sanal kısımları $u(x,y)=x^2-y^2$ ve $v(x,y)=1+2xy$ olarak hesaplanır.

(b) $z=x+iy$ olmak üzere $f(z)=\sqrt{z+1}$ fonksiyonunu

$$f=u+iv$$

formunda yazabiliriz. Böylece verilen fonksiyonun reel ve sanal kısımları u ve v ;

$$u^2-v^2=x+1 \text{ ve } 2uv=y$$

denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilir.

(c) $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ olmak üzere $f(z)=z^n=u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)$ yazabiliriz. Böylece verilen fonksiyonun reel ve sanal kısımları;

$$u(\rho,\theta)=\rho^n\cos n\theta \text{ ve } v(\rho,\theta)=\rho^n\sin n\theta$$

olarak hesaplanır.

(d) $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ olmak üzere $f(z)=\sqrt[n]{z}=u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)$ yazabiliriz. Böylece $k=0,1,2,...,n-1$ için verilen fonksiyonun reel ve sanal kısımları;

$$u(\rho,\theta)=\sqrt[n]{\rho}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} \text{ ve } v(\rho,\theta)=\sqrt[n]{\rho}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

olarak hesaplanır.

(e) $z=x+iy$ olmak üzere $f(z)=2z^2-3z+5=u(x,y)+iv(x,y)$ olarak alınırsa $u(x,y)=2x^2-2y^2-3x+5$ ve $v(x,y)=4xy-3y$ olarak hesaplanır.

(f) $z=x+iy$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{z-1}{\bar{z}+1}=u(x,y)+iv(x,y)$ olarak alınırsa

$$\frac{z-1}{\bar{z}+1}=\frac{(z-1)(z+1)}{|z+1|^2}=\frac{x^2-y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{2xy}{(x+1)^2+y^2}=u(x,y)+iv(x,y)$$

olduğunu elde ederiz.

Problem 50. $|z| = R$ çemberinin $f_1(z) = z + \frac{1}{z}$ ve $f_2(z) = z - \frac{1}{z}$ fonksiyonları altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm

$|z| = R \neq 1$ ve $|z| = 1$ çemberlerinin f_1 fonksiyonu altındaki görüntüleri sırasıyla $\frac{u^2}{(R+1/R)^2} + \frac{v^2}{(R-1/R)^2} = 1$ elipsi ve $v = 0, -2 \leq u \leq 2$ doğrusudur.
$|z| = R \neq 1$ ve $|z| = 1$ çemberlerinin f_2 fonksiyonu altındaki görüntüleri sırasıyla $\frac{u^2}{(R-1/R)^2} + \frac{v^2}{(R+1/R)^2} = 1$ elipsi ve $u = 0, -2 \leq v \leq 2$ doğrusudur.

Problem 51. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$ limitinin mevcut olduğunu kabul edelim, bu taktirde aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w}$ **(b)** $\lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w$

(c) $\lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w$ **(d)** $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |w|$

Çözüm

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$ şartı, "her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|f(z) - w| < \varepsilon$" olacağını ifade eder.

Böylece;

(a) $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ için $\varepsilon > |f(z) - w| = |\overline{f(z) - w}| = |\overline{f(z)} - \overline{w}|$ olduğu elde edilir.

(b) - (c) $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ için

$$\varepsilon > |f(z) - w| \geq |\operatorname{Re}(f(z) - w)| = |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} w|$$

ve

$$\varepsilon > |f(z) - w| \geq |\operatorname{Im}(f(z) - w)| = |\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} w|$$

olduğu elde edilir.

(d) $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ için $\varepsilon > |f(z) - w| \geq \big||f(z)| - |w|\big| = |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} w|$ olduğu elde edilir.

Problem 52. $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=|w|$ limitinin mevcut olduğunu kabul edelim. Hangi değerler için $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ limitinin mevcut olduğunu bulunuz.

Çözüm

$|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$ için $\varepsilon>\big||f(z)|\big|=|f(z)|$ olduğundan $w=0$ için $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcuttur.

Genelde, bu limitin sadece bu durum ($w=0$ durumu için) için mevcut olduğunu kanıtlamalıyız. $w\neq 0$ için $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde bir önceki örnekten $|A|=w$ dir.

$$\big||f(z)|-|A|\big|\leq|f(z)-A|$$

eşitsizliğinde ($|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$ için $\big||f(z)|-|A|\big|=|f(z)-A|$ olduğundan) eşitlik durumunu ele alacak olursak;

$$\big(|f(z)|-|A|\big)^2=(f(z)-A)\overline{(f(z)-A)}=|f(z)|^2+|A|^2-2\operatorname{Re}\big(f(z)\cdot\overline{A}\big),$$

$$\operatorname{Re}\big(f(z)\cdot\overline{A}\big)=\big|f(z)\cdot\overline{A}\big|=|f(z)\cdot A|,$$

elde edilir ve böylece

$$\operatorname{Re}\big(f(z)\cdot\overline{A}\big)\geq 0 \text{ ve } \operatorname{Im}\big(f(z)\cdot\overline{A}\big)=0$$

olduğu elde edilir. Bu taktirde $f(z)\cdot\overline{A}$ reel ve non-negatif olmak zorundadır ki bu durum genel bir kompleks f fonksiyonu için mümkün değildir. Özel olarak bu durum $f(z)=A$ veya f nin reel olmasıyla mümkündür.

Problem 53.

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sum_{i=m}^{p}u_i z^i}{\sum_{i=n}^{p}v_i z^i}$$

limitinin mevcut olmasını sağlayan *m* ve *n* sayıları arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm

$z=1/w$ olarak alınırsa;

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sum_{i=m}^{p}u_i z^i}{\sum_{i=n}^{p}v_i z^i}=\lim_{w\to\infty}\frac{\sum_{i=m}^{p}u_i\, 1/w^i}{\sum_{i=n}^{p}v_i\, 1/w^i}=\lim_{w\to\infty}\frac{u_m w^{p-m}+u_{m+1}w^{p-m-1}+\ldots+u_{p-1}w+u_p}{v_n w^{p-n}+v_{n+1}w^{p-n-1}+\ldots+v_{p-1}w+v_p}$$

olduğu elde edilir.

Limitin mevcut olması için $p-m\leq p-n$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $m\geq n$ olduğu sonucuna varılır.

Problem 54. Aşağıda verilen ifadelerin doğruluğunu kanıtlayınız.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\cdot i^n}{n^3+1}=0$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+3i}-\dfrac{in}{n+1}\right)=1-i$

Çözüm

(a) Verilen herhangi $\varepsilon>0$ için $n>N(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ sayısı bulmalıyız öyle ki; $\left|\dfrac{n^2\cdot i^n}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon$ olsun. Bu taktirde;

$$\left|\frac{n^2\cdot i^n}{n^3+1}-0\right|=\left|\frac{n^2\cdot i^n}{n^3+1}\right|=\left|\frac{n^2}{n^3+1}\right|<\left|\frac{n^2}{n^3}\right|=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0<\varepsilon$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $N=[\varepsilon]$ olarak alınabilir ($[\varepsilon]$ sayısı, ε sayısının tam kısmıdır.). Böylece istenen elde edilmiş olur.

(b) Verilen herhangi $\varepsilon>0$ için $n>N(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ sayısı bulmalıyız öyle ki; $\left|\dfrac{n}{n+3i}-\dfrac{in}{n+1}-(1-i)\right|<\varepsilon$ olsun. Bu taktirde;

$$\left|\frac{n}{n+3i}-\frac{in}{n+1}-(1-i)\right|=\left|\frac{-\left[(9n+9)-i\left(2n^2+3n-9\right)\right]}{\left(n^2+9\right)(n+1)}\right|$$

$$\leq\left|\frac{9n+9}{\left(n^2+9\right)(n+1)}\right|+\left|\frac{2n^2+3n-9}{\left(n^2+9\right)(n+1)}\right|\xrightarrow{n\to\infty}0<\varepsilon$$

olduğu elde edilir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Problem 55. Herhangi z kompleks sayısı için

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3z}{n^2}\right)=1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Verilen herhangi $\varepsilon>0$ için $n>N(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ sayısı bulmalıyız öyle ki; $\left|1+\dfrac{3z}{n^2}-1\right|<\varepsilon$ olsun. $z=x+iy$ olsun. Bu taktirde;

$$\left|1+\frac{3z}{n^2}-1\right|=\left|\frac{3x+3iy}{n^2}\right|\leq\left|\frac{3x}{n^2}\right|+\left|\frac{3y}{n^2}\right|\xrightarrow{n\to\infty}0<\varepsilon$$

olur. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Problem 56. $\lim\limits_{n\to\infty} ni^n$ limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$$\left|ni^n\right| = |n| = n > M > 0$$

olacak şekilde keyfi $M \in \Re$ bulunabileceğinden verilen limit mevcut değildir.

Problem 57. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\left(\bar{z}\right)^2}{z} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $|z-0| = |z| < \delta$ iken $\left|\dfrac{\left(\bar{z}\right)^2}{z} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı bulmalıyız.

Problem 58. $w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ olmak üzere $\lim\limits_{z\to w_n}\left(1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm $z \neq 1$ için $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$ dir. Bu halde;

$$\lim_{z\to w_n}\left(1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}\right) = \lim_{z\to w_n}\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right) = \frac{1-\left(e^{2\pi i/n}\right)^n}{1-e^{2\pi i/n}} = \frac{e^{2\pi i}-1}{e^{2\pi i/n}-1} = \frac{1-1}{e^{2\pi i/n}-1} = 0$$

Problem 59. Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz

(a) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{x^2}{z} = 0$ **(b)** $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{|z|^2}{z} = -i$

Çözüm

(a) $z = x + iy$ olsun. $z \to i \Rightarrow x \to 0$ dır. Böylece;

$$\lim_{z\to i}\frac{x^2}{z} = \lim_{z\to i}\frac{0^2}{i} = 0$$

olarak hesaplanır.

(b) $z = x + iy$ olsun. $z \to i \Rightarrow x \to 0$ *ve* $y \to 1$ dır. Böylece;

$$\lim_{z\to i}\frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to i}\frac{x^2+y^2}{z} = \lim_{z\to i}\frac{0^2+1^2}{i} = \frac{1}{i} = -i$$

olarak hesaplanır.

Problem 60. $f(z)=\dfrac{z^2}{|z|^2}=\dfrac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki eğriler boyunca $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ limitini hesaplayarak elde edilen sonuçları yorumlayınız.

(a) $y=x$ **(b)** $y=2x$ **(c)** $y=x^2$

Çözüm

(a) $y=x$ doğrusu boyunca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2+2ixx}{x^2+x^2}=i$$

olarak hesaplanır.

(b) $y=2x$ doğrusu boyunca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x^2+2ix2x}{x^2+4x^2}=\frac{-3+4i}{5}$$

olarak hesaplanır.

(c) $y=x^2$ parabolü boyunca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^4+2ixx^2}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2+2ix}{1+x^2}=1$$

olarak hesaplanır.

$(0,0)$ noktasına farklı eğriler üzerinden yaklaşıldığında farklı limit değerleri elde edildiğinden $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ limiti mevcut değildir.

Problem 61. $u(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(x,y)\to(0,0)$ için limiti var mıdır?

Çözüm

$(0,0)$ noktasına $y=mx$ doğruları üzerinden yaklaşalım, bu durumda;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-m^2x^3}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)x=0$$

olarak hesaplanır.

Problem 62. L'Hospital kuralı yardımıyla aşağıdaki limitleri bulunuz.

(a) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^4-1}{z-i}$ **(b)** $\lim\limits_{z\to i+1}\dfrac{z^2-iz-1-i}{z^2-2z+2}$ **(c)** $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^6+1}{z^2+1}$

(d) $\lim\limits_{z\to i+1}\dfrac{z^4+4}{z^2-2z+2}$ **(e)** $\lim\limits_{z\to 1+i\sqrt{3}}\dfrac{z^6+64}{z^3+8}$ **(f)** $\lim\limits_{z\to 1+i\sqrt{3}}\dfrac{z^9-64}{z^3-8}$

Çözüm

(a) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^4-1}{z-i}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Böylece bu limite L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{z\to i}\frac{z^4-1}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{4z^3}{1}=-4i$$

olarak hesaplanır.

(b) $\lim\limits_{z\to i+1}\dfrac{z^2-iz-1-i}{z^2-2z+2}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Böylece bu limite L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{z\to i+1}\frac{z^2-iz-1-i}{z^2-2z+2}=\lim_{z\to i+1}\frac{2z-i}{2z-2}=\frac{2+i}{2i}$$

olarak hesaplanır.

(c) $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^6+1}{z^2+1}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Böylece bu limite L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^6+1}{z^2+1}=\lim_{z\to -i}\frac{6z^5}{2z}=3$$

olarak hesaplanır.

(d) $\lim\limits_{z\to i+1}\dfrac{z^4+4}{z^2-2z+2}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Böylece bu limite L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{z\to i+1}\frac{z^4+4}{z^2-2z+2}=\lim_{z\to i+1}\frac{4z^3}{2z-2}=\frac{4(1+i)^3}{2i}$$

olarak hesaplanır.

(e)-(f) Çözüm okuyucu tarafından yapılacaktır.

Problem 63. $z \neq 0$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{x^2+iy^2}{|z|}$ ve $f(0)=1$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $z=0$ noktasında sürekliliğini araştırınız.

Çözüm

$$f(z)=\begin{cases} x^2+iy^2/|z| & ,z\neq 0 \\ 1 & ,z=0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu için $z \neq 0$ iken $y=mx$ doğrusu üzerinden limit alınırsa;

$$\lim_{z\to 0}\frac{x^2+iy^2}{|z|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+iy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1+im^2\right)}{x\sqrt{1+m^2}}=0$$

olarak hesaplanır. Diğer yandan $f(0)=1$ olarak verildiğinden $f(z)$ fonksiyonu $z=0$ noktasında sürekli değildir.

Problem 64. $z \neq 0$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ ve $f(0)=1$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $z=0$ noktasında sürekliliğini araştırınız.

Çözüm

$$f(z)=\begin{cases} \operatorname{Re} z/|z| & ,z\neq 0 \\ 1 & ,z=0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu için $z \neq 0$ iken $y=mx$ doğrusu üzerinden limit alınırsa;

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

olarak hesaplanır. m nin farklı değerlerine karşılık farklı limit değerleri elde edileceğinden $f(z)$ fonksiyonu $z=0$ noktasında sürekli değildir.

Problem 65. $z \neq 0$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ ve $f(0) = 0$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasında sürekliliğini araştırınız.

Çözüm

$$f(z) = \begin{cases} z \operatorname{Re} z / |z| & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu için $z \neq 0$ iken $y = mx$ doğrusu üzerinden limit alınırsa;

$$\lim_{z \to 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1+mi)}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla $f(z)$ fonksiyonu $\forall z \in C$ noktası için süreklidir.

Problem 66. $f(z) = z^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $z = z_0$ noktasında sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm

Verilen $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ sayısının varlığını göstermeliyiz.

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z| - |z_0| \leq |z - z_0| < \delta \Rightarrow |z| < \delta + |z_0|$ dır.

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0||z + z_0| < \delta(|z| + |z_0|) < \delta(\delta + |z_0| + |z_0|) = \delta(\delta + 2|z_0|) = \varepsilon$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu $z = z_0$ süreklidir.

Problem 67. $f(z) = z^2$ fonksiyonunun $|z| \leq 1$ bölgesinde sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm

$z_0, |z| \leq 1$ bölgesinde alınan herhangi bir nokta olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ sayısının varlığını göstermeliyiz.

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z| - |z_0| \leq |z - z_0| < \delta \Rightarrow |z| < \delta + |z_0|$ dır.

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0||z + z_0| < \delta(|z| + |z_0|) < \delta(\delta + |z_0| + |z_0|) = \delta(\delta + 2|z_0|) = \varepsilon$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu süreklidir. $z_0, |z| \leq 1$ bölgesinde alınan keyfi bir nokta olduğundan $f(z)$ $|z| \leq 1$ bölgesinde süreklidir.

Problem 68. $f(z)=|z|^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $z=z_0$ noktasında sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm

Verilen $\varepsilon>0$ için $|z-z_0|<\delta$ olduğunda $\left||z|^2-|z_0|^2\right|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon,z_0)$ sayısının varlığını göstermeliyiz.

$|z-z_0|<\delta \Rightarrow |z|-|z_0|\le|z-z_0|<\delta \Rightarrow |z|<\delta+|z_0|$ dır.

$$\left||z|^2-|z_0|^2\right|^2=\left(|z|^2-|z_0|^2\right)\overline{\left(|z|^2-|z_0|^2\right)}=\left(|z|^2-|z_0|^2\right)^2=\left(|z|-|z_0|\right)^2\left(|z|+|z_0|\right)^2<\delta^2\left(\delta+2|z_0|\right)^2=\varepsilon^2$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan;

$$\left||z|^2-|z_0|^2\right|^2<\varepsilon^2 \Rightarrow \left||z|^2-|z_0|^2\right|<\varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $f(z)=|z|^2$ fonksiyonu $z=z_0$ noktasında süreklidir. Burada $z=z_0$ noktası keyfi olduğundan $f(z)=|z|^2$ fonksiyonu her noktada süreklidir.

Problem 69. Aşağıdaki limitleri (varsa) hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+1}{z^2+3iz-2}$ **(b)** $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{z^2-2i}{z^2-2z+2}$ **(c)** $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$

Çözüm

(a) $$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z^2+3iz-2}=\lim_{z\to -i}\frac{(z-i)(z+i)}{(z+2i)(z+i)}=\lim_{z\to -i}\frac{(z-i)}{(z+2i)}=\frac{-i-1}{-i+2i}=-2$$

(b)

$$\lim_{z\to 1+i}\frac{z^2-2i}{z^2-2z+2}=\lim_{z\to 1+i}\frac{z^2-(1+i)^2}{(z-1)^2+1}=\lim_{z\to 1+i}\frac{(z-1-i)(z+1+i)}{(z-1-i)(z-1+i)}=\lim_{z\to 1+i}\frac{(z+1+i)}{(z-1+i)}=1-i$$

(c) $x,y\in\Re$ olmak üzere $z=x+iy$ olarak alalım. Bu taktirde;

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Im} z}{z}=\lim_{x+iy\to 0}\frac{y}{x+iy}$$

olarak yazabiliriz. $y=mx$ doğruları üzerinden limit alınırsa;

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Im} z}{z}=\lim_{x+iy\to 0}\frac{y}{x+iy}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x+imx}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+im}=\frac{m}{1+im}$$

olarak hesaplanır. m nin farklı değerlerine karşılık farklı limit değerleri elde edileceğinden $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$ limiti mevcut değildir.

Problem 70. Aşağıdaki limitleri (varsa) hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+4}{z+2i}$ **(b)** $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{z^2-3-4i}{z^2-4z+5}$ **(c)** $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{z}$

Çözüm

(a) $$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+4}{z+2i}=\lim_{z\to -i}\frac{(z+2i)(z-2i)}{z+2i}=\lim_{z\to -i}(z-2i)=-2i-2i=-4i$$

(b) $$\lim_{z\to 1+i}\frac{z^2-3-4i}{z^2-4z+5}=\lim_{z\to 1+i}\frac{(z-2-i)(z+2+i)}{(z-2-i)(z-2+i)}=\lim_{z\to 1+i}\frac{(z+2+i)}{(z-2+i)}=1-2i$$

(c) **I.yol:** $\left|\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{z}\right|=\dfrac{\left|\mathrm{Re}(z^2)\right|}{|z|}\le\dfrac{|z|^2}{|z|}=|z|\xrightarrow{z\to 0}0$ yazabiliriz, böylece istenen limit mevcut ve değeri "0" dır.

II.yol: $r>0$ olmak üzere $r,t\in\Re$ için $z=re^{it}$ olarak alalım. Bu taktirde; $z^2=r^2e^{2it}$ ve $\mathrm{Re}(z^2)=r^2\cos(2t)$ olur. Bu hesaplamalar verilen limitte yerine yazılırsa;

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{z}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^2\cos(2t)}{re^{it}}=\lim_{r\to 0^+}re^{-it}\cos(2t)=0.$$

(Burada $\left|e^{-it}\cos(2t)\right|\le 1$ olduğu göz önüne alınmalıdır.)

Problem 71. $x,y\in\Re$ olmak üzere;

$$u=x^2-y^2-2x+4y \text{ ve } v=2xy-4x-2y$$

kuralları ile verilen $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

- (u,v) çiftinin Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını gösteriniz.
- u *ve* v nin harmonik fonksiyonlar olduklarını gösteriniz.
- $u+iv$ fonksiyonunun $z=x+iy$ değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak yazılabileceğini gösteriniz.
- u^2+v^2 polinomunu x *ve* y değişkenlerinin lineer çarpanlarının çarpımı olarak yazınız.

Çözüm

- Verilen fonksiyonların x *ve* y değişkenlerine göre kısmi türevlerinin alınmasıyla
$$u_x=2x-2\,,u_y=-2y+4\,,v_x=2y-4\,,v_y=2x-2$$
denklemleri elde edilir. Buradan $u_x=v_y$ ve $u_y=-v_x$ olduğu görülür. Böylece verilen fonksiyonların Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığı görülür.
- $u_x=2x-2\,,u_{xx}=2\,,u_y=-2y+4\,,u_{yy}=-2\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$
ve
$v_x=2y-4\,,v_{xx}=0\,,v_y=2x-2\,,v_y=0\Rightarrow v_{xx}+v_{yy}=0$

olduğundan u ve v nin harmonik fonksiyonlardır.

- $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ olarak yazılabilir. Bu taktirde;

$$\begin{aligned} u+iv &= x^2 - y^2 - 2x + 4y + 2ixy - 4ix - 2iy \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy + (-2-4i)x + (4-2i)y \\ &= z^2 - (2+4i)(x+iy) = z^2 - (2+4i)z = z(z-2-4i) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

-

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 = |u+iv|^2 &= |z(z-2-4i)|^2 = z(z-2-4i)\overline{z(z-2-4i)} \\ &= z\bar{z}(z-2-4i)(\bar{z}-2+4i) \\ &= (x+iy)(x-iy)(x-2+i(y-4))(x-2-i(y-4)) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Problem 72. z, belirlenmiş bir z_0 noktasının bir komşuluğunun rasgele bir noktasını göstersin. $\Delta z = z - z_0$ yazalım ve Δz yi karmaşık değişken olarak düşünelim. Böyle olunca f nin z_0 daki f' yada df/dz türevi eğer limit mevcutsa,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (1)$$

şeklinde tanımlanır.

(1) eşitliği ile tanımlı limitin varlığını kabul ederek

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

olduğunu gösteriniz. $|\Delta z|$ sayısının değer aralığını bulunuz.

<u>Çözüm</u>

(1) eşitliği ile verilen $f'(z_0)$ karmaşık sayısı, yani türev varsa bu taktirde her bir pozitif ε sayısına karşılık bir δ sayısı karşılık gelir öyle ki;

$0 < |\Delta z - 0| < \delta$ olduğunda daima $\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$ kalır.

Problem 73. Bir f fonksiyonunun bir z_0 noktasında türevli ise sürekli olacağını gösteriniz.

Çözüm

$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ mevcut iken $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\Rightarrow f'(z_0)\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z$$

$$\Rightarrow 0=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\Delta z\right]=\lim_{\Delta z\to 0}\left[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\right]$$

$$\Rightarrow 0=\lim_{z\to z_0}f(z)-\lim_{z\to z_0}f(z_0)\Rightarrow\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Problem 74. $f(z)=|z|^2$ fonksiyonunun sadece $z=0$ noktasında türevinin var olduğunu, bunun dışında hiçbir noktada türevinin mevcut olmadığını gösteriniz.

Çözüm

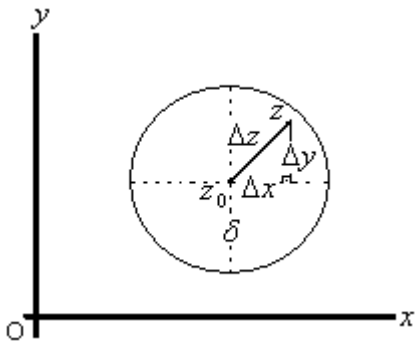
Bu fonksiyon için;

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$=\frac{z_0\cdot\overline{\Delta z}+\overline{z_0}\cdot\Delta z+\Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}=z_0\cdot\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{z_0}+\overline{\Delta z}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

farklar bölümü yazılabilir.

$z_0=0$ için $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\overline{\Delta z}$ dir ve bunun limiti sıfırdır; yani $z=0$ da $\dfrac{d|z|^2}{dz}=0$ dır.



$z_0\neq 0$ ve $f'(z)$ nin mevcut olduğunu kabul edelim. Δz rasgele bir şekilde sıfıra yaklaşırken $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ nin bir ve yalnızca bir $f'(z)$ limiti vardır.

Özel olarak; Δz gerçel ise (yandaki şekilde) $\Delta z=\Delta x$ dir; böyle olunca $\overline{\Delta z}=\Delta z$ elde edilir ve (1) eşitliğine göre de limit $z_0+\overline{z_0}$ olmalıdır. Ancak Δz nin $0<|z|<\delta$ bölgesinin düşey çapında olması istendiğinde $\Delta z=i\Delta y$ olur; böyle olunca da $\overline{\Delta z}=-\Delta z$ elde edilir ve limit $\overline{z_0}-z_0$ olmalıdır. Buradan $z_0\neq 0$ olduğunda limitin mevcut olmadığı görülür. Dolayısıyla $|z|^2$ nin z_0 da türevi yoktur.

Problem 75. Aşağıdaki $f(z)$ fonksiyonları için $f'(z)$ türevinin hiçbir yerde mevcut olmadığını gösteriniz.
(a) $\bar{z}$ **(b)** $z-\bar{z}$ **(c)** $2x+xy^2 i$ **(d)** $e^x(\cos y - i\sin y)$

Çözüm

(a) $f(z)=\bar{z}=x-iy=u(x,y)+iv(x,y)\Rightarrow u(x,y)=x\ ,\ v(x,y)=-y$
$u_x=1, v_y=-1$ ve $u_y=0, v_x=0$ dır. Dolayısıyla $u_x\neq v_y$ olduğundan $f(z)$ nin hiçbir yerde türevi mevcut değildir.
(b) $f(z)=z-\bar{z}=2iy\Rightarrow u(x,y)=0, v(x,y)=2y$
$u_x=0, v_y=2$ ve $u_y=0, v_x=0$ dır. Dolayısıyla $u_x\neq v_y$ olduğundan $f(z)$ nin hiçbir yerde türevi mevcut değildir.
(c) $f(z)=2x+ixy^2\Rightarrow u(x,y)=2x, v(x,y)=xy^2$
$u_x=2, v_y=2xy$ ve $u_y=0, v_x=y^2$ dır. Dolayısıyla $u_x\neq v_y$ olduğundan $f(z)$ nin hiçbir yerde türevi mevcut değildir.
(d) $f(z)=2x+ixy^2\Rightarrow u(x,y)=e^x\cos y, v(x,y)=-e^x\sin y$
$u_x=e^x\cos y, v_y=-e^x\cos y$ ve $u_y=-e^x\sin y, v_x=-e^x\sin y$ dır. Dolayısıyla $u_x\neq v_y$ olduğundan $f(z)$ nin hiçbir yerde türevi mevcut değildir.

Problem 76. Aşağıdaki fonksiyonlar için $f'(z)$ ile $f''(z)$ türevinin her yerde mevcut olduğunu gösteriniz. $f'(z)$ ile $f''(z)$ yi hesaplayınız.
(a) $f(z)=iz+2$ **(b)** $f(z)=e^{-x}(\cos y - i\sin y)$ **(c)** $f(z)=z^3$
(d) $f(z)=\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

Çözüm

(a) $f(z)=iz+2=-y+2+ix\Rightarrow u(x,y)=-y+2, v(x,y)=x$ dir. u ve v fonksiyonları sürekli olup bunların 1. mertebeden kısmi türevleri olan;

$$u_x=0, u_y=-1 \text{ ve } v_x=1, v_y=0$$

fonksiyonları da süreklidir ve bu fonksiyonlar;

$$u_x=v_y=0 \text{ ve } -v_x=u_y=-1$$

C-R denklemlerini sağladıklarından $f'(z)$ türevi mevcuttur. Bu türev;

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=0+i\cdot 1=i$$

olarak elde edilir.
$f'(z)=i\Rightarrow u_x(x,y)=0, v_x(x,y)=1$ dir. u_x ve v_x fonksiyonları sürekli olup bunların 1. mertebeden kısmi türevleri olan;

$$u_{xx}=0, u_{yy}=0 \text{ ve } v_{xx}=0, v_{yy}=0$$

fonksiyonları da süreklidir ve bu fonksiyonlar;

$$u_{xx}=v_{yy}=0 \text{ ve } -v_{xx}=u_{yy}=0$$

C-R denklemlerini sağladıklarından $[f'(z)]' = f''(z)$ türevi mevcuttur. Bu türev;

$$f''(z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + i\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 + i \cdot 0 = 0$$

olarak elde edilir.

(b) $f(z) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y \Rightarrow u(x,y) = e^{-x}\cos y, v(x,y) = -e^{-x}\sin y$ dir. u ve v fonksiyonları sürekli olup bunların 1. mertebeden kısmi türevleri olan;

$$u_x = -e^{-x}\cos y, u_y = -e^{-x}\sin y \text{ ve } v_x = e^{-x}\sin y, v_y = -e^{-x}\cos y$$

fonksiyonları da süreklidir ve bu fonksiyonlar;

$$u_x = v_y \text{ ve } -v_x = u_y$$

C-R denklemlerini sağladıklarından $f'(z)$ türevi mevcuttur. Bu türev;

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x = -e^{-x}\cos y + ie^{-x}\sin y$$

olarak elde edilir.

$f'(z) = -e^{-x}\cos y + ie^{-x}\sin y \Rightarrow u_x(x,y) = -e^{-x}\cos y, v_x(x,y) = e^{-x}\sin y$ dir. u_x ve v_x fonksiyonları sürekli olup bunların 1. mertebeden kısmi türevleri olan;

$$u_{xx} = e^{-x}\cos y, u_{yy} = e^{-x}\sin y \text{ ve } v_{xx} = -e^{-x}\sin y, v_{yy} = e^{-x}\cos y$$

fonksiyonları da süreklidir ve bu fonksiyonlar;

$$u_{xx} = v_{yy} \text{ ve } -v_{xx} = u_{yy}$$

C-R denklemlerini sağladıklarından $[f'(z)]' = f''(z)$ türevi mevcuttur. Bu türev;

$$f''(z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + i\frac{\partial v_x}{\partial x} = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$$

olarak elde edilir.

(c)

$f(z) = z^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i \Rightarrow u(x,y) = x^3 - 3xy^2, v(x,y) = 3x^2y - y^3$ dir. u ve v fonksiyonları sürekli olup bunların 1. mertebeden kısmi türevleri olan;

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, u_y = -6xy \text{ ve } v_x = 6xy, v_y = 3x^2 - 3y^2$$

fonksiyonları da süreklidir ve bu fonksiyonlar;

$$u_x = v_y \text{ ve } -v_x = u_y$$

C-R denklemlerini sağladıklarından $f'(z)$ türevi mevcuttur. Bu türev;

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x = 3x^2 - 3y^2 + i6xy$$

olarak elde edilir.

$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy \Rightarrow u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2, v_x(x,y) = 6xy$ dir. u_x ve v_x fonksiyonları sürekli olup bunların 1. mertebeden kısmi türevleri olan;

$$u_{xx} = 6x, u_{yy} = -6y \text{ ve } v_{xx} = 6y, v_{yy} = 6x$$

fonksiyonları da süreklidir ve bu fonksiyonlar;

$$u_{xx} = v_{yy} \text{ ve } -v_{xx} = u_{yy}$$

C-R denklemlerini sağladıklarından $[f'(z)]' = f''(z)$ türevi mevcuttur. Bu türev;

$$f''(z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + i\frac{\partial v_x}{\partial x} = 6x - i6y$$

olarak elde edilir.

(d)

$f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \Rightarrow u(x,y) = \cos x \cosh y, v(x,y) = -\sin x \sinh y$ dir. u ve v fonksiyonları sürekli olup bunların 1. mertebeden kısmi türevleri olan;

$u_x = -\sin x \cosh y, u_y = \cos x \sinh y$ ve $v_x = -\cos x \sinh y, v_y = -\sin x \cosh y$ fonksiyonları da süreklidir ve bu fonksiyonlar;

$$u_x = v_y \text{ ve } -v_x = u_y$$

C-R denklemlerini sağladıklarından $f'(z)$ türevi mevcuttur. Bu türev;

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x = -\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

olarak elde edilir.

$f'(z) = -\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y \Rightarrow u_x(x,y) = -\sin x \cosh y, v_x(x,y) = -\cos x \sinh y$ dir. u_x ve v_x fonksiyonları sürekli olup bunların 1. mertebeden kısmi türevleri olan;

$u_{xx} = -\cos x \cosh y, u_{yy} = -\sin x \sinh y$ ve $v_{xx} = \sin x \sinh y, v_{yy} = -\sin x \cosh y$ fonksiyonları da süreklidir ve bu fonksiyonlar;

$$u_{xx} = v_{yy} \text{ ve } -v_{xx} = u_{yy}$$

C-R denklemlerini sağladıklarından $[f'(z)]' = f''(z)$ türevi mevcuttur. Bu türev;

$$f''(z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + i\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$$

olarak elde edilir.

Problem 77. Herhangi $x, y \in \Re$ için $u(x,y) = x^3 + 4x^2 + x(6 - 3y^2) - 4y^2$ fonksiyonunu tanımlayalım.

- u nun harmonik olduğunu ispatlayınız.
- u nun harmonik eşleniği olacak şekilde bir v fonksiyonunu bulunuz.
- $z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ise, $f(z)$ nin neden analitik olduğunu açıklayınız ve $f'(z)$ yi u ve v nin türevleri cinsinden yazınız.
- $f'(z)$ yi değişkeni z olan bir polinom olarak ifade ediniz.

Çözüm

- $u(x,y)=x^3+4x^2+x(6-3y^2)-4y^2$ fonksiyonunun x ve y ye göre kısmi türevlerini hesaplayalım;
  $u_x=3x^2+8x+6-3y^2, u_y=-6xy-8y, u_{xx}=6x+8, u_{yy}=-6x-8$
  Böylece $u_{xx}+u_{yy}=6x+8-6x-8=0$ olduğundan u harmonik fonksiyondur.
- $v_y=u_x=3x^2+8x+6-3y^2$ dir. Bu ifadenin y ye göre integralini alarak $v=3x^2y+8xy+6y-y^3+g(x)$ yi elde ederiz. Son olarak $0=u_y+v_x=-6xy-8y+6xy+8y+g'(x)=g'(x)$ olduğu bulunur. Böylece $g(x)=C$ (keyfi sabit reel sayı olmak üzere) ve u nun harmonik eşleniği $v=3x^2y+8xy+6y-y^3+C$ olarak hesaplanır.
- u_x, u_y, v_x *ve* v_y türev fonksiyonları her yerde tanımlı, sürekli ve C-R denklemlerini sağladıklarından diferansiyellenebilmenin temel teoremi gereğince $f(z)$ nin her yerde diferansiyellenebileceğini biliyoruz. Böylece $f(z)$ analitiktir (ve tamdır). Bu taktirde aynı teorem gereğince;
  $$f'(z)=f_x=u_x+iv_x=3x^2+8x+6-3y^2+i(6xy+8y)$$
  olduğu elde edilir.
- Bir önceki seçenekte elde ettiğimiz
  $$f'(z)=f_x=u_x+iv_x=3x^2+8x+6-3y^2+i(6xy+8y)$$
  sonucunu kullanacak olursak;
  $$\begin{aligned} f'(z)&=3x^2+8x+6-3y^2+i(6xy+8y)\\ &=3(x^2-y^2+2ixy)+8(x+iy)+6\\ &=3(x+iy)^2+8(x+iy)+6\\ &=3z^2+8z+6 \end{aligned}$$
  olduğunu elde ederiz.

Problem 78. $x,y\in\Re$ olmak üzere $\forall z=x+iy\in C$ için;
$$f(x,y)=2xy+i(x^2-3y^2)$$
kuralı ile tanımlı $f(x,y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. f fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğu tüm noktaları bulunuz, fonksiyonun her bir noktadaki türevini bulunuz ve fonksiyonun analitik olduğu tüm noktaları bulunuz.

Çözüm

f nin reel ve sanal kısımları birer polinom olduklarından her yerde süreklidirler ve diferansiyellenebilirdirler(sürekli türevlerle).

Bu nedenle diferansiyellenebilmenin temel teoreminden, "f nin bir noktada diferansiyellenebilmesi için gerek ve yeter şart o noktada C-R

denklemlerini sağlamasıdır" ve bu taktirde f nin verilen noktadaki türevi f_x olarak hesaplanır.(burada; f_x, f nin x e göre kısmi türevidir.)

Kısmi türevlerin hesaplanmasıyla;

$$f_x = 2y + 2xi \,,\, f_y = 2x - 6yi$$

ifadeleri elde edilir. Buradan da

$$0 = f_x + if_y = 2y + 2xi + i(2x - 6yi) = 8y + 4xi$$

elde edilir.

Böylece, sadece $y = 0 \; ve \; x = 0$ olması durumda C-R denklemleri sağlanır. Böylelikle f sadece orijinde diferansiyellenebilirdir ki burada f nin türevi $f_x = [2y + 2xi]_{x=0,\,y=0} = 0$ dır. Sonuç olarak f nin diferansiyellenebilir olduğu açık bir bölge mevcut olmadığından f hiçbir yerde analitik değildir.

Problem 79. $u(x, y) = e^{2x} \sin y \cos y$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz. $u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu analitik olacak şekilde bir reel $v(x, y)$ fonksiyonu mevcut mudur? Açıklayınız.

<u>Çözüm</u>

$u(x, y) = e^{2x} \sin y \cos y$ fonksiyonunun x ve y göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevleri;

$$u_x = 2e^{2x} \sin y \cos y \,, u_{xx} = 4e^{2x} \sin y \cos y$$

ve

$$u_y = e^{2x}\left(\cos^2(y) - \sin^2(y)\right), u_{yy} = -4e^{2x} \sin y \cos y$$

olarak hesaplanır. Böylece ;

$$u_{xx} + u_{yy} = 4e^{2x} \sin y \cos y - 4e^{2x} \sin y \cos y = 0$$

olduğundan u harmoniktir.

Eğer $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun reel ve sanal kısımları için $u_x = v_y \,, u_y = -v_x$ C-R denklemleri sağlanırsa f analitik olacaktır.

Böylece burada ilk olarak;

$$v_x = -e^{2x}\left(\cos^2(y) - \sin^2(y)\right)$$

yazalım.

Her iki tarafın x e göre integrallenmesiyle;

$$v = -\frac{1}{2}e^{2x}\left(\cos^2(y) - \sin^2(y)\right) + C(y)$$

elde edilir.

Son olarak;

$$v_y = -\frac{1}{2}e^{2x}\left(-4\sin y \cos y + C'(y)\right) = 2e^{2x} \sin y \cos y + C'(y) = u_x = 2e^{2x} \sin y \cos y$$

yazılırsa; buradan $C'(y) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $C(y)$ bir A sabitidir. Böylece;

$$v = \frac{1}{2}e^{2x}\left(\sin^2(y) - \cos^2(y)\right) + A$$

fonksiyonu $u + iv$ yi harmonik yapar.

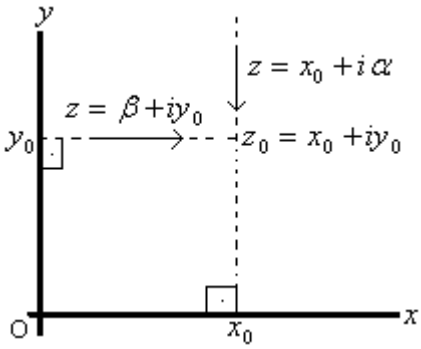
Problem 80. Aşağıdaki $f(z)$ fonksiyonlarının $f'(z_0)$ türevlerinin mevcut olup olmadığını türev tanımını kullanarak elde ediniz.

(a) $f(z)=\mathrm{Im}(z), z_0 \in C$ **(b)** $f(z)=|z|, z_0 = i$

(c) $f(z)=\mathrm{Re}(z), z_0 \in C$ **(d)** $f(z)=(\bar{z})^2, z_0 = 2-i$

Çözüm

(a)

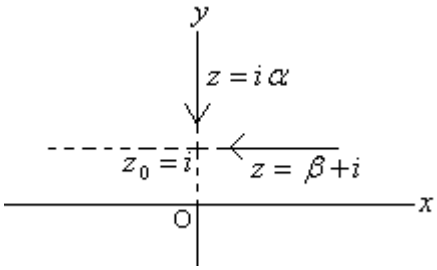


$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z_0)}{z-z_0}=\frac{\mathrm{Im}(x_0+\alpha i)-\mathrm{Im}(x_0+iy_0)}{i(\alpha-y_0)}$$
$$=\frac{\alpha-y_0}{i(\alpha-y_0)}=-i$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z_0)}{z-z_0}=\frac{\mathrm{Im}(\beta+iy_0)-\mathrm{Im}(x_0+iy_0)}{\beta-x_0}$$
$$=\frac{y_0-y_0}{\beta-x_0}=0$$

$z=x_0+\alpha i$ ve $z=\beta+iy_0$ üzerinden yaklaşımlar sonucunda farklı limitler elde edildiğinden $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ fonksiyonu hiçbir yerde diferansiyellenemez.

(b)

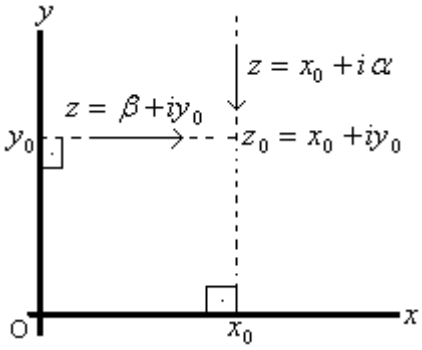


$$\lim_{z\to i}\frac{|\alpha i|-|i|}{\alpha i-i}=\frac{\alpha-1}{i(\alpha-1)}=-i$$

$$\lim_{z\to i}\frac{|\beta+i|-|i|}{\beta+i-i}=\frac{\sqrt{\beta^2+1}-1}{\beta}$$

$z=\alpha i$ ve $z=\beta+i$ üzerinden yaklaşımlar sonucunda farklı limitler elde edildiğinden $f(z)=|z|$ fonksiyonu $z_0=i$ de diferansiyellenemez.

(c)

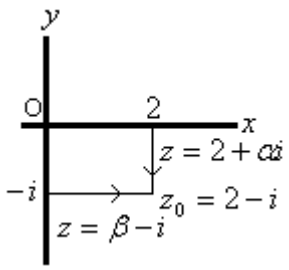


$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{Re}(x_0+\alpha i)-\mathrm{Re}(x_0+iy_0)}{i(\alpha-y_0)}$$
$$=\frac{x_0-x_0}{i(\alpha-y_0)}=0$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{Re}(\beta+iy_0)-\mathrm{Re}(x_0+iy_0)}{\beta-x_0}=\frac{\beta-x_0}{\beta-x_0}=1$$

$z=x_0+\alpha i$ ve $z=\beta+iy_0$ üzerinden yaklaşımlar sonucunda farklı limitler elde edildiğinden $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ fonksiyonu hiçbir yerde diferansiyellenemez.

(d)



$$z=2+\alpha i\to z_0=2-i\,(\alpha\to-1)$$
$$\Rightarrow\lim_{z\to 2-i}\frac{\left(\overline{2+\alpha i}\right)^2-\left(\overline{2-i}\right)^2}{i(\alpha+1)}=-4-2i$$

$$z=\beta-i\to z_0=2-i\,(\beta\to 2)$$
$$\Rightarrow\lim_{z\to 2-i}\frac{\left(\overline{\beta-i}\right)^2-\left(\overline{2-i}\right)^2}{\beta+2}=0$$

$z=2+\alpha i$ ve $z=\beta-i$ üzerinden yaklaşımlar sonucunda farklı limitler elde edildiğinden $f(z)=\left(\overline{z}\right)^2$ fonksiyonu $z_0=2-i$ de diferansiyellenemez.